

Redovi realnih brojeva

Redovi s članovima proizvoljnog predznaka

Kažemo da je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **apsolutno konvergentan** ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentan. Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

kažemo da je **uvjetno konvergentan** ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan, a red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergentan.

Teorem Svaki apsolutno konvergentni red je konvergentan.

Alternirani red Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je **alternirani red** ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_{2n-1} \geq 0, a_{2n} \leq 0 \quad \text{ili} \quad a_{2n-1} \leq 0, a_{2n} \geq 0$$

Leibnizov kriterij

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alternirani red. Ako niz realnih brojeva $(|a_n|)$ pada i konvergira nuli, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira nekom realnom broju a za koji vrijedi ocjena:

i) ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \geq 0$ i $a_{2n} \leq 0$, onda je $a_2 < a < a_1$

ii) ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \leq 0$ i $a_{2n} \geq 0$, onda je $a_1 < a < a_2$.

6. Ispitajte konvergenciju sljedećih redova

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (n!)^2}{(2n)!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}$

7. Odredite područje konvergencije sljedećih redova potencija

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2 + 1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (x-2)^n$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^n (x-2)^{2n}$$

Taylorov red: Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $c \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ klase C^∞ . Red potencija oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n, \quad (1)$$

zovemo **Taylorov red** funkcije f u okolini točke c .

Ako je $c = 0$ red (1) zovemo **Mac Laurinov red**.

8. Funkciju $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ razvijte u Mac Laurinov red.
9. Funkciju $f(x) = e^x$ razvijte u Mac Laurinov red.
10. Funkciju $f(x) = \sin x$ razvijte u Mac Laurinov red.
11. Funkciju $f(x) = \cos x$ razvijte po potencijama od x .
12. Funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ razvijte u red potencija u okolini točke $x_0 = 2$.