Numerička integracija

Generalizirano trapezno pravilo

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $h=\dfrac{b-a}{n}$, $x_i=a+h\cdot i, i=0,\ldots,n$, $y_i=f(x_i)$

$$I^\star=\frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n)$$

– ukoliko trebamo postići točnost $\varepsilon>0$ tada n treba zadovoljavati nejednakost

$$n>(b-a)\sqrt{\frac{M_2}{\varepsilon}\cdot\frac{b-a}{12}},\qquad M_2=\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

Generalizirano Simpsonovo pravilo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $h=\dfrac{b-a}{n}$, $x_i=a+h\cdot i, i=0,\ldots,n$, $y_i=f(x_i)$

$$I^\star=\frac{h}{3}((y_0+y_{2m})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2m-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2m-2}))$$

– ukoliko trebamo postići točnost $\varepsilon>0$ tada $n=2m$ treba zadovoljavati nejednakost

$$n>(b-a)\sqrt[4]{\frac{M_4}{\varepsilon}\cdot\frac{b-a}{180}},\qquad M_4=\max_{x\in[a,b]}|f^{IV}(x)|$$

1. Primjenom generaliziranog trapeznog i generaliziranog Simpsonovog pravila uz $n=4$ izračunajte približnu vrijednost integrala
$$\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$$
te odredite apsolutne greške dobivenih aproksimacija.

2. Izračunajte $\ln 2$ s točnošću $\varepsilon=0.5\times10^{-2}$ primjenjujući formulu
$$\ln 2=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$
Za izračunavanje određenog integrala primjenite generalizirano trapezno i generalizirano Simpsonovo pravilo.

3. Primjenom Simpsonove formule odredite vrijednost integrala
$$\int_{-1}^0\frac{x^2-1}{x-4}\mathrm{d}x$$
s točnošću $\varepsilon=0.5\times10^{-4}$.

4. Izračunajte, s točnošću $\varepsilon=0.5\times10^{-4}$
$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}.$$
Za izračunavanje određenog integrala primjenite generalizirano trapezno i generalizirano Simpsonovo pravilo.

Redovi realnih brojeva

Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Niz (s_n), čiji je opći član zadan s

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

zovemo niz parcijalnih suma.
Uređeni par $((a_n), (s_n))$ zovemo red realnih brojeva. Pri tome kažemo da je a_n opći član reda, a s_n njegova $n-$ta parcijalna suma.

Za red $((a_n), (s_n))$ kažemo da konvergentan [divergentan] ako je njegov niz parcijalnih suma (s_n) konvergentan [divergentan]. Ako postoji $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, kažemo da je s suma ili zbroj reda $((a_n), (s_n))$ i pišemo

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Red $((a_n), (s_n))$ također zapisujemo u obliku $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. Nađite sumu reda

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

2. Ispitajte konvergenciju reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$