Redovi realnih brojeva

Nužan uvjet konvergencije reda: Ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan, onda je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. Ispitajte konvergenciju sljedećih redova

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16n^{2017}+6}{8n^{2017}}$.

Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je red s nenegativnim članovima ako je $a_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Red s nenegativnim članovima je konvergentan onda i samo onda ako je njegov niz parcijalnih suma omeđen.

Poredbeni kriterij

Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ bilo koja dva reda s nenegativnim članovima i neka postoji realan broj $c > 0$ i prirodan broj n_0 takvi da je

$$a_n \leq cb_n \quad (n \geq n_0).$$

Onda vrijedi

a) Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, onda konvergira i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

b) Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, onda divergira i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Poredbeni kriterij u formi limesa

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s nenegativnim članovima te $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ red s pozitivnim članovima i neka postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \geq 0$.

a) Za $c > 0$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira onda i samo onda ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira.

b) Ako je $c = 0$ i ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, onda i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

c) Ako je $c = 0$ i ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, onda i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

4. Ispitajte konvergenciju sljedećih redova

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{5n^4+1}$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}}$

   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \sin^2 \frac{\pi}{n}$.

Cauchyjev kriterij u formi limesa

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s nenegativnim članovima. Ako postoji $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira za $L < 1$ i divergira za $L > 1$.

D'Alambertov kriterij u formi limesa

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s pozitivnim članovima. Ako postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira za $L < 1$ i divergira za $L > 1$.

5. Ispitajte konvergenciju sljedećih redova

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2}$, $a > 0$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

   c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$

   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

   f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right)^n$

   g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n(n+2)}\right)^{n^2}$.