

## Vježbe 9

### Nepravi integral s beskonačnim granicama

Neka je  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija koja je integrabilna na svakom konačnom intervalu  $[a, b]$ . Ako postoji

$$L = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

onda  $L$  zovemo **nepravi integral** funkcije  $f$  na skupu  $[a, +\infty)$  i pišemo

$$L = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Ako  $L$  postoji kažemo da integral  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  konvergira, a u suprotnom da divergira.

$f : \langle -\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$f : \langle -\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

1. Riješite sljedeće nepravne integrale:

a)  $\int_{-\infty}^a e^x dx$

b)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

Kriteriji konvergencije nepravih integrala

1. kriterij konvergencije: Neka je  $x \geq a$  i  $0 < f(x) \leq g(x)$ .

a) Ako  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  konvergira, onda i  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  konvergira.

b) Ako  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  divergira, onda i  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  divergira.

2. kriterij konvergencije: Ako postoji

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < +\infty,$$

onda oba integrala  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  i  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  zajedno ili divergiraju ili konvergiraju.

2. Ispitajte konvergenciju integrala:

a)  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, a > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

b)  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x + 1} dx$

c)  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^2}$

d)  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

### Nepravi integrali neomeđenih funkcija

Neka je  $f$  zadana na konačnom intervalu  $[a, b]$  i neka je na njemu neomeđena ( $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$  ili  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$ ).

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \int_a^{c+\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \end{aligned}$$

Ako oba limesa postoje kažemo da integral  $\int_a^b f(x) dx$  konvergira, a u suprotnom da divergira.

3. Izračunajte sljedeće nepravne integrale:

a)  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}$

b)  $\int_0^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$

c)  $\int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

d)  $\int_0^{3a} \frac{2x}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} dx$

### Primjene određenog integrala-računanje površine

4. Nađite površinu lika omeđenog parabolom  $y = x^2$ , pravcima  $x = -1$ ,  $x = 2$  i osi  $x$ .

5. Nađite površinu lika omeđenog parabolom  $y = -x^2 + 2x$  i pravcem  $y = -x$ .

6. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama  $x^2 + y^2 = 2$  i  $y = x^2$ .

7. Izračunajte površinu lika omeđenog sinusoidom  $y = \sin x$  i osi  $x$  za  $x \in [0, 2\pi]$ .
8. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama  $y = 4x - x^2$  i  $y = 2x^2 - 5x$ .
9. Izračunajte površinu lika omeđenog elipsom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$