

Vježbe 7

Binomni integral

Binomni integral

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}, a, b \in \mathbb{R}$$

- 1) $p \in \mathbb{Z}$, supstitucija $x = t^k$, gdje je k zajednički nazivnik od m i n
- 2) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, supstitucija $a + bx^n = t^k$, gdje je k nazivnik od p
- 3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, supstitucija $b + ax^{-n} = t^k$, gdje je k nazivnik od p

3. Riješite sljedeće integrale:

a) $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$

b) $\int \frac{x^3 dx}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

c) $\int x^5 \sqrt[7]{2-3x^6} dx$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} (\sqrt[4]{x} + 1)^{10}}$

e) $\int x^{-11} (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} dx$

Integrali trigonometrijskih funkcija

$$\int \mathcal{R}(\cos x, \sin x) dx$$

supstitucija: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

$$dx = \frac{2}{t^2 + 1} dt$$

$$\sin x = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}$$

1. Riješite sljedeće integrale:

a) $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$

b) $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$

c) $\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)}$

$$\int \mathcal{R}(\cos x, \sin x) dx$$

I) $\mathcal{R}(-\sin x, \cos x) = -\mathcal{R}(\sin x, \cos x)$, supstitucija $\cos x = t$

II) $\mathcal{R}(\sin x, -\cos x) = -\mathcal{R}(\sin x, \cos x)$, supstitucija $\sin x = t$

III) $\mathcal{R}(-\sin x, -\cos x) = \mathcal{R}(\sin x, \cos x)$, supstitucija $\operatorname{tg} x = t$

2. Riješite sljedeće integrale:

a) $\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx$

b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}$

c) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

I) m neparan, $m > 0$, supstitucija $\cos x = t$

II) n neparan, $n > 0$, supstitucija $\sin x = t$

III) $m + n$ paran, $m + n < 0$, supstitucija $\operatorname{tg} x = t$

IV) m i n parni, $m > 0$, $n > 0$ podintegralnu funkciju treba napisati kao zbroj trigonometrijskih funkcija višestrukog kuta.

3. Riješite sljedeće integrale:

a) $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$

b) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$

$$\text{I) } \int \sin ax \cos bxdx = \frac{1}{2} \int (\sin(a-b)x + \sin(a+b)x)dx$$

$$\text{II) } \int \sin ax \sin bxdx = \frac{1}{2} \int (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x)dx$$

$$\text{III) } \int \cos ax \cos bxdx = \frac{1}{2} \int (\cos(a-b)x + \cos(a+b)x)dx$$

4. Riješite sljedeće integrale:

a) $\int \sin 2x \sin 3xdx$

b) $\int \sin x \cos 2x \cos 3xdx$