Odjel za fiziku, Sveučilište u Osijeku
06.06.2014.

Matematika 2 - TREĆI KOLOKVIJ
Grupa A

1. **[20 bod.]** Odredite površinu lika omeđenog krivuljama $y = 9 - x^2$ i $y = x^2 - 3x$.
2. **[15 bod.]** Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljom $y = -x^2 + x + 6$, oko osi $x$.
3. **[20 bod.]** Primjenom Simpsonove formule izračunajte vrijednost integrala $\int_0^1 \frac{1}{2x+2}\mathrm{d}x$ s točnošću $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-4}$.
4. Ispitajte konvergenciju reda: a) **[10 bod.]** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(10n+1)}{n!}$, b) **[15 bod.]** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n(n+2)}$.
5. **[20 bod.]** Razvijte funkciju $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^3}$ u MacLaurinov red.

**Volumen rotacionog tijela**

Volumen tijela koje nastaje rotacijom pseudotrapeza omeđenog grafom funkcije $y = f(x)$, osi $x$ i pravcima $x = a$ i $x = b$ oko osi $x$ računamo kao

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 \mathrm{d}x$$

**Generalizirano Simpsonovo pravilo**

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + h \cdot i, i = 0, \ldots, n$, $y_i = f(x_i)$

$$I^\star = \frac{h}{3}((y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2}))$$

– ukoliko trebamo postići točnost $\varepsilon > 0$ tada $n = 2m$ treba zadovoljavati nejednakost

$$n > (b-a)\sqrt[4]{\frac{M_4}{\varepsilon} \cdot \frac{b-a}{180}}, \qquad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{IV}(x)|$$

**Taylorov red**

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $c \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ klase $C^\infty$. Red potencija oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \tag{1}$$

zovemo Taylorov red funkcije $f$ u okolini točke $c$.

Ako je $c = 0$ red (1) zovemo Mac Laurinov red.

Odjel za fiziku, Sveučilište u Osijeku
06.06.2014.

Matematika 2 - TREĆI KOLOKVIJ
Grupa B

1. **[20 bod.]** Odredite površinu lika omeđenog krivuljama $y = 16 - x^2$ i $y = x^2 - 4x$.
2. **[15 bod.]** Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljom $y = -x^2 - x + 6$, oko osi $x$.
3. **[20 bod.]** Primjenom Simpsonove formule izračunajte vrijednost integrala $\int_0^1 \frac{1}{3x+3} \mathrm{d}x$ s točnošću $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-4}$.
4. Ispitajte konvergenciju reda: a) **[10 bod.]** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n 9n}{(n+1)!}$ , b) **[15 bod.]** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$.
5. **[20 bod.]** Razvijte funkciju $f(x) = \frac{1}{(3x+1)^2}$ u MacLaurinov red.

**Volumen rotacionog tijela**

Volumen tijela koje nastaje rotacijom pseudotrapeza omeđenog grafom funkcije $y = f(x)$, osi $x$ i pravcima $x = a$ i $x = b$ oko osi $x$ računamo kao

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 \mathrm{d}x$$

**Generalizirano Simpsonovo pravilo**

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + h \cdot i, i = 0, \ldots, n$, $y_i = f(x_i)$

$$I^\star = \frac{h}{3}((y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2}))$$

– ukoliko trebamo postići točnost $\varepsilon > 0$ tada $n = 2m$ treba zadovoljavati nejednakost

$$n > (b-a) \sqrt[4]{\frac{M_4}{\varepsilon} \cdot \frac{b-a}{180}}, \qquad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{IV}(x)|$$

**Taylorov red**

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $c \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ klase $C^\infty$. Red potencija oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n, \tag{2}$$

zovemo Taylorov red funkcije $f$ u okolini točke $c$.

Ako je $c = 0$ red (1) zovemo Mac Laurinov red.