Neki poznati limesi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta} \qquad \lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{\beta}{x}}=e^{\alpha\beta} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

L'Hôpitalovo pravilo

Neka su f i g dvije funkcije takve da je $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$ ili $\pm\infty$ i postoji $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, tada je

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

L'Hôpitalovo pravilo primjenjuje se za neodređene oblike

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$$

Pravila deriviranja

1. $(f(x)\pm g(x)')=f'(x)\pm g'(x)$
2. $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
3. $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x),\quad c\in\mathbb{R}$
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2},\quad g(x)\neq 0,\quad \forall x\in\mathcal{D}_g$
5. $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Tablica derivacija osnovnih funkcija

$c'=0,\ c\in\mathbb{R}$	$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},\ \alpha\in\mathbb{R}$
$(e^x)'=e^x$	$(a^x)'=a^x\ln a$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\mathrm{arcsin}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\mathrm{arccos}x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}$
$(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$	$(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$

Svojstva neodređenog integrala

1. Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna na I, onda je:
$$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

2. Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ integrabilna na I, onda je :
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x).$$

3. Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ integrabilna na I i λ bilo koji realan broj, onda je funkcija λf integrabilna na I i pri tome je:
$$\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x.$$

4. Ako su funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrabilne na I, onda je i funkcija $f \pm g$ integrabilna na I i pri tome je:
$$\int (f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Metoda parcijalne integracije

$$\begin{aligned}\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\ \int u\mathrm{d}v &= uv - \int v\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Tablica neodređenih integrala

$$\int c\mathrm{d}x = cx + C, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Integrali iracionalnih funkcija

1. Ako je podintegralna funkcija oblika

$$\mathcal{R}(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_s}{n_s}})$$

uvodimo supstituciju

$$x = t^k, \qquad k = \mathsf{NZV}(n_1, n_2, \ldots, n_s)$$

2. Ako je podintegralna funkcija oblika

$$\mathcal{R}\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right)$$

uvodimo supstituciju

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = t^k, \qquad k = \mathsf{NZV}(n_1,, n_2, \ldots, n_s)$$

3. Integrale oblika $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$ rastavljamo na

$$\frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x + \left(N - \frac{bM}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

4. Integrale oblika $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ supstitucijom $t = \dfrac{1}{Mx+N}$ svodimo na prethodni.

Binomni integral

$$\int x^m(a+bx^n)^p \mathrm{d}x, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Binomni integral se može riješiti u sljedećim slučajevima:

1. $p \in \mathbb{Z} \implies$ supstitucija $x = t^k$, gdje je k zajednički nazivnik od m i n
2. $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \implies$ supstitucija $a + bx^n = t^k$, gdje je k nazivnik od p
3. $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \implies$ supstitucija $ax^{-n} + b = t^k$, gdje je k nazivnik od p

Integrali trigonometrijskih funkcija

1. Integrali oblika
$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$$
gdje je $\mathcal{R}$ racionalna funkcija od $\sin x$ i $\cos x$, supstitucijom
$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$$
svodi se na integral racionalne funkcije
$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

2. U slučaju kada se u integralu racionalne funkcije oblika
$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$$
javljaju trigonometrijske funkcije s potencijama, koristimo sljedeće supstitucije
   a) ako je $\mathcal{R}(-\sin x, \cos x) = -\mathcal{R}(\sin x, \cos x) \implies$ supstitucija $\cos x = t$
   b) ako je $\mathcal{R}(\sin x, -\cos x) = -\mathcal{R}(\sin x, \cos x) \implies$ supstitucija $\sin x = t$
   c) ako je $\mathcal{R}(-\sin x, -\cos x) = \mathcal{R}(\sin x, \cos x) \implies$ supstitucija $\mathrm{tg}\ x = t$

3. Integrale oblika
$$\int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x$$
rješavamo na sljedeći način:
   a) ako je m neparan, $m > 0$, supstitucija $\cos x = t$
   b) ako je n neparan, $n > 0$, supstitucija $\sin x = t$
   c) ako je $m + n$ paran, $m + n < 0$, supstitucija $\mathrm{tg}\ x = t$
   d) ako su m i n parni, $m > 0$ i $n > 0$, podintegralne funkcije treba napisati kao trigonometrijske funkcije višestrukog kuta

4. Integrale oblika
$$\int \sin ax \cos bx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int \sin(a-b)x\mathrm{d}x + \int \sin(a+b)x\mathrm{d}x\right]$$
$$\int \sin ax \sin bx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int \cos(a-b)x\mathrm{d}x - \int \cos(a+b)x\mathrm{d}x\right]$$
$$\int \cos ax \cos bx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int \cos(a-b)x\mathrm{d}x + \int \cos(a+b)x)\mathrm{d}x\right]$$
rješavamo tako da produkte transformiramo u zbroj.

Newton Leibnizova formula

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$. Ako je F bilo koja primitivna funkcija od f na $[a,b]$ onda je

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Nepravi integrali s beskonačnim granicama

Neka je $f\colon [a,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija koja je integrabilna na svakom konačnom intervalu $[a,b]$. Ako postoji

$$L = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

onda L zovemo nepravi integral funkcije f na skupu $[a,+\infty\rangle$ i pišemo

$$L = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

Ako L postoji kažemo da integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ konvergira, a u suprotnom da divergira.

Za funkciju $f\colon \langle-\infty,b] \to \mathbb{R}$, nepravi integral je

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Za funkciju $f\colon \langle-\infty,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$, nepravi integral je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

<u>Kriteriji konvergencije nepravih integrala</u>

1. kriterij konvergencije

   Neka je $x \geq a$ i $0 < f(x) \leq g(x)$.

   a) Ako $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ konvergira, onda i $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ konvergira.

   b) Ako $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ divergira, onda i $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ divergira.

2. kriterij konvergencije

   Ako postoji

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < +\infty,$$

   onda oba integrala $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ i $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ zajedno ili divergiraju ili konvergiraju.

Nepravi integrali neomeđenih funkcija

Neka je f zadana na konačnom intervalu $[a, b]$ i neka je na njemu neomeđena, tj. $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ ili $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^-} \int_a^{c+\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ako oba limesa postoje kažemo da integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ konvergira, a u suprotnom da divergira.

Primjena određenih integrala - računanje površine

Neka je lik omeđen grafovima funkcija f i g na segmentu $[a, b]$. Tada je površina lika dana s

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$$

Primjena određenih integrala - duljina luka krivulje

1. Neka je krivulja zadana jednadžbom $y = f(x)$. Duljina luka krivulje između točaka s apscisama $x = a$ i $x = b$ dana je integralom

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

2. Neka je krivulja zadana parametarskim jednadžbama $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Duljina luka krivulje između točaka s apscisama $x = a = \varphi(\alpha)$ i $x = b = \varphi(\beta)$ dana je s

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\mathrm{d}t$$

Primjena određenih integrala - volumeni rotacijskih tijela

1. Volumen tijela koje nastaje rotacijom pseudotrapeza omeđenog grafom funkcije $y = f(x)$, osi x i pravcima $x = a$ i $x = b$ oko osi x računamo kao

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\mathrm{d}x$$

2. Volumen tijela koje nastaje rotacijom pseudotrapeza omeđenog grafom funkcije $x = g(y)$, osi y i pravcima $y = c$ i $y = d$ oko osi y računamo kao

$$V_y = \pi \int_c^d x^2\mathrm{d}y$$

3. Za funkciju zadanu parametarski s $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$, volumen tijela dan je kao

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 x'(t)\mathrm{d}t$$

Numerička integracija - generalizirano trapezno pravilo

Za funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ekvidistantna subdivizija segmenta $[a,b]$ zadana je s

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} x_i &= a + h \cdot i, \\ y_i &= f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

Procjena integrala dana je formulom

$$I^\star = \frac{h}{2}\Big(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\Big)$$

Ukoliko trebamo postići točnost $\varepsilon > 0$ tada n treba zadovoljavati nejednakost

$$n > (b-a)\sqrt{\frac{M_2}{\varepsilon} \cdot \frac{b-a}{12}}, \qquad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Numerička integracija - generalizirano Simpsonovo pravilo

Za funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ekvidistantna subdivizija segmenta $[a,b]$ zadana je s

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} x_i &= a + h \cdot i, \\ y_i &= f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

Procjena integrala dana je formulom

$$I^\star = \frac{h}{3}\Big((y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2})\Big)$$

Ukoliko trebamo postići točnost $\varepsilon > 0$ tada $n = 2m$ treba zadovoljavati nejednakost

$$n > (b-a)\sqrt[4]{\frac{M_4}{\varepsilon} \cdot \frac{b-a}{180}}, \qquad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{IV}(x)|$$

Neki limesi nizova

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\beta n}=e^{\alpha\beta} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$$

Konvergencija geometrijskog reda

Suma geometrijskog reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$, u ovisnosti o q dana je na sljedeći način

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}=\begin{cases}\infty, & q\geq 1\\ \dfrac{a_1}{1-q}, & q<1\end{cases}$$

Nužan uvjet konvergencije reda

Ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan, onda je $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

Poredbeni kriterij

Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ bilo koja dva reda s nenegativnim članovima i neka postoji realan broj $c>0$ i prirodan broj n_0 takvi da je

$$a_n\leq cb_n \quad (n\geq n_0).$$

Onda vrijedi:

1. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, onda konvergira i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
2. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, onda divergira i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Poredbeni kriterij u formi limesa

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s nenegativnim članovima te $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ red s pozitivnim članovima i neka postoji $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c\geq 0$.

1. Za $c>0$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira onda i samo onda ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira.
2. Ako je $c=0$ i ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, onda i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
3. Ako je $c=0$ i ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, onda i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

Cauchyjev kriterij u formi limesa

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s nenegativnim članovima. Ako postoji $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira za $L < 1$ i divergira za $L > 1$.

D'Alambertov kriterij u formi limesa

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s pozitivnim članovima. Ako postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira za $L < 1$ i divergira za $L > 1$.

Leibnizov kriterij za alternirane redove

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alternirani red. Ako niz realnih brojeva $(|a_n|)$ pada i konvergira nuli, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira nekom realnom broju a za koji vrijedi ocjena:

1. ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \geq 0$ i $a_{2n} \leq 0$, onda je $a_2 < a < a_1$
2. ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \leq 0$ i $a_{2n} \geq 0$, onda je $a_1 < a < a_2$.

Taylorov red potencija

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $c \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ klase C^∞. Taylorov red u okolini točke c dan je s

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Maclaurinov red potencija

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f : I \to \mathbb{R}$ klase C^∞. Maclaurinov red u okolini točke $c = 0$ dan je s

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Neki osnovni razvoji u red potencija

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1 \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1 \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1 \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty$$