

Primjene određenog integrala-računanje površine

1. Nađite površinu lika omeđenog parabolom $y = x^2$, pravcima $x = -1$, $x = 2$ i osi x .
2. Nađite površinu lika omeđenog parabolom $y = -x^2 + 2x$ i pravcem $y = -x$.
3. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $x^2 + y^2 = 2$ i $y = x^2$.
4. Izračunajte površinu lika omeđenog sinusoidom $y = \sin x$ i osi x za $x \in [0, 2\pi]$.
5. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = 4x - x^2$ i $y = 2x^2 - 5x$.

Duljina luka krivulje

Neka je krivulja zadana jednadžbom $y = f(x)$. Duljina luka krivulje između točaka s apscisama $x = a$ i $x = b$ dana je integralom

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Neka je krivulja zadana parametarskim jednadžbama $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Duljina luka krivulje između točaka s apscisama $x = a = \varphi(\alpha)$ i $x = b = \varphi(\beta)$ dana je integralom

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

6. Nađite duljinu luka krivulje $y^2 = (x - 1)^3$ između točaka $A = (2, -1)$ i $B = (5, -8)$.
7. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \ln x$ od $x = \sqrt{3}$ do $x = \sqrt{5}$.
8. Izračunajte duljinu luka astroide

$$\begin{aligned}x &= a \cos^3 t \\y &= a \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi).\end{aligned}$$

9. Izračunajte duljinu luka krivulje

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{3}t^3 - t \\y &= t^2 + 2,\end{aligned}$$

od $t = 0$ do $t = 3$.

Volumeni rotacijskih tijela

Volumen tijela koje nastaje rotacijom pseudotrapeza omeđenog grafom funkcije $y = f(x)$, osi x i pravcima $x = a$ i $x = b$ oko osi x računamo kao

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Volumen tijela koje nastaje rotacijom pseudotrapeza omeđenog grafom funkcije $x = g(y)$, osi y i pravcima $y = c$ i $y = d$ oko osi y računamo kao

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$$

Funkcija zadana parametarski

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 \dot{x}(t) dt$$

10. Nađite volumen tijela koje nastaje rotacijom parabole $y = ax - x^2$, $a > 0$ oko osi x .

11. Izračunajte volumen elipsoida nastalog rotacijom elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oko

a) osi x ;

b) osi y .

12. Nađite volumen tijela koje nastaje rotacijom jednog svoda cikloide

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t),$$

oko osi x .