Donja i gornja Darbouxova suma.Integralna suma

- Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ omeđena na segmentu $I = [a, b]$, tj. takva da postoje brojevi m i M sa svojstvom
$$m \le f(x) \le M \quad \text{za svaki } x \in [a, b].$$
- Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ bilo koja subdivizija segmenta I.

$$\Downarrow$$

- Postoje brojevi
$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$m \le m_i \le M_i \le M$$
- Na svakom segmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, odaberimo bilo koju točku ξ_i. Prema definiciji supremuma M_i i infimuma m_i vrijedi
$$m_i \le f(\xi_i) \le M_i,$$
tj.
$$m \le m_i \le f(\xi_i) \le M_i \le M.$$
- Donja Darbouxova suma
$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$
- Gornja Darbouxova suma
$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$
- Integralna suma
$$\sigma(f, P, \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$m(b-a) \le s(f, P) \le \sigma(f, P, \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}) \le S(f, P) \le M(b-a)$$

Donji i gornji Riemannov integral

Neka je $\mathcal{P}$ skup svih subdivizija segmenta $[a,b]$

- Donji Riemannov integral

$$I_\star(f,[a,b]) = \sup\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}\}$$

- Gornji Riemannov integral

$$I^\star(f,[a,b]) = \inf\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}\}$$

Teorem: Ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena na $[a,b]$, onda je

$$I_\star(f,[a,b]) \leq I^\star(f,[a,b]).$$

Definicija: Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija na $[a,b]$. Ako je $I_\star(f,[a,b]) = I^\star(f,[a,b])$, onda za funkciju f kažemo da je integrabilna u Riemannovom smislu ili integrabilna na segmentu $[a,b]$, a realan broj

$$I(f,[a,b]) = I_\star(f,[a,b]) = I^\star(f,[a,b])$$

nazivamo određenim integralom funkcije f na segmentu $[a,b]$ i onačavamo s

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Pri tome kažemo da je f podintegralna funkcija, a segment $[a,b]$ područje integracije.

Zadaci

Zad.1. Ekvidistantna subdivizija segmenta $[0,2]$ zadana je točkama

$$x_i = \frac{2i}{n}, \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Za funkciju $f(x) = 3x+2$ odredite

a) donju Darbouxovu sumu $s(f,P_n)$;

b) gornju Darbouxovu sumu $S(f,P_n)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,P_n)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,P_n)$.

Zad.2. Neka je $f(x) = x^2$. Neka je P_n evidistantna subdivizija segmenta $[1,2]$. Za subdiviziju P_n odredite

a) donju Darbouxovu sumu $s(f,P_n)$;

b) gornju Darbouxovu sumu $S(f,P_n)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,P_n)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,P_n)$.

Uputa:$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Zad.3. Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$. Neka je $P_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ subdivizija segmenta $[1, 2]$ sa svojstvom

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{x_2}{x_1} = \cdots = \frac{x_n}{x_{n-1}} = q.$$

Za subdiviziju P_n odredite

a) donju Darbouxovu sumu $s(f, P_n)$;

b) gornju Darbouxovu sumu $S(f, P_n)$;

c) $\lim_{n\to\infty} s(f, P_n)$;

d) $\lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$.

Zad.4. Izračunajte $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$ pomoću granične vrijednosti integralne sume. Pri tome uzmite ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[0, 1]$ te $\xi_i = x_i$, $i = 1, \dots, n$.

Neodređeni integral

Definicija: Neka je I jedan od sljedećih skupova: $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$ ili $[a, b]$. Primitivnom funkcijom funkcije f na skupu I nazivamo svaku funkciju F sa svojstvom

$$F'(x) = f(x), \quad \text{za svaki } x \in I.$$

Za funkciju f kažemo da je integrabilna na I, ako ona na I ima primitivnu funkciju. Skup svih primitivnih funkcija funkcije f označavamo s $\int f(x)\mathrm{d}x$ i nazivamo neodređenim integralom.

Svojstva neodređenog integrala

1. Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna na I, onda je:
$$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

2. Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ integrabilna na I, onda je :
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x).$$

3. Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ integrabilna na I i λ bilo koji realan broj, onda je funkcija λf integrabilna na I i pri tome je:
$$\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x.$$

4. Ako su funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrabilne na I, onda je i funkcija $f + g$ integrabilna na I i pri tome je:
$$\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Tablica neodređenih integrala

$$\int c\mathrm{d}x = cx + C$$

$$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathsf{tg}\, x + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathsf{ctg}\, x + C$$

$$\int \mathsf{ctg}\, x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \mathsf{tg}\, x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathsf{arctg}\, x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$$

Zadaci

Zad.1. Riješite sljedeće integrale:

a) $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 4)\mathrm{d}x$,

b) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$,

d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x}$,

e) $\int 7^x 3^{-x}\mathrm{d}x$,

f) $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\mathrm{d}x$,

g) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$,

h) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$.