Konačnodimenzionalni vektorski prostori.

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Potprostor

Definicija 1.39. Neka je V vektorski prostor, te neka su L i M njegovi potprostori. Kažemo da je suma potprostora L i M direktna i tada je označavamo s $L \dot{+} M$ ako je

$$L \cap M = \{0\}.$$

Propozicija 1.40. Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Suma $L + M$ je direktna ako i samo ako svaki vektor $v \in L + M$ dopušta jedinstven prikaz u obliku

$$v = a + b, \qquad a \in L, \quad b \in M.$$

Teorem 1.41. Neka je V konačnodimenzionalni prostor, te neka su L i M potprostori od V. Tada je

$$\dim(L + M) + \dim(L \cap M) = \dim L + \dim M.$$

Korolar 1.42. Neka potprostori L i M konačnodimenzionalnog prostora V čine direktnu sumu. Tada je

$$\dim(L \dot{+} M) = \dim L + \dim M.$$

Primjer 1.43. Promotrimo potprostore G i D prostora $\mathcal{M}_n$.

Primjer 1.44. Promotrimo potprostore S i A prostora $\mathcal{M}_n$.

Definicija 1.45. Neka je V vektorski prostor, te neka je L potprostor od V. Potprostor M prostora V se naziva direktan komplement od L ako vrijedi

$$L \dot{+} M = V.$$

Teorem 1.46. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i L njegov potprostor. Tada postoji direktan komplement od L u V.

Napomena 1.47. U proizvoljnom vektorskom prostoru niti jedan netrivijalni potprostor nema jedinstven direktan komplement.

- V vektorski prostor, ne nužno konačnodimenzionalan, M potprostor od V
- definiramo binarnu relaciju $\sim$ na V formulom

$$x \sim y \Longleftrightarrow y - x \in M, \quad x, y \in V$$

- za $x \in V$ s $[x]$ označavamo klasu ekvivalencije određenu vektorom x, odnosno
$$[x] = \{y \in V \ : x \sim y\}$$
- x nazivamo reprezentantom ili predstavnikom ove klase ekvivalencije. Uočimo da se ista klasa $[x]$ može predočiti i drugim predstavnicima
$$[x] = [y] \Longleftrightarrow x \sim y$$
- klase ekvivalencije za ovako uvedenu relaciju možemo i preciznije opisati:
vrijedi
$$[x] = x + M, \quad \forall x \in V,$$
pri čemu $x + M$ označava skup $\{x + a \ : \ a \in M\}$

Definicija 1.48. Neka je M potprostor prostora V. Svaki skup oblika
$$x + M = \{x + a \ : \ a \in M\}, \quad x \in V,$$
naziva se linearna mnogostrukost u smjeru potprostora M. Skup svih linearnih mnogostrukosti u smjeru potprostora M označava se s V/M i naziva kvocijentni skup ili kvocijent (prostora V po potprostoru M).

Teorem 1.49. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te neka je M potprostor od V. Tada je uz operacije
$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M, \quad x, y \in V$$
$$\alpha(x + M) = \alpha x + M, \quad \alpha \in \mathbb{F}, \quad x \in V,$$
kvocijentni skup V/M vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

Teorem 1.50. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i M njegov potprostor. Tada je i prostor V/M konačnodimenzionalan i vrijedi
$$\dim V/M = \dim V - \dim M.$$