# Konačnodimenzionalni vektorski prostori.

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

## Potprostor

**Definicija 1.27.** Neka je $V$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Ako je i $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ uz iste operacije iz $V$, kažemo da je $M$ potprostor od $V$.

Kada je $M$ potprostor od $V$, pisat ćemo $M \leq V$.

**Propozicija 1.28.** Neka je $V$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $M$ neprazni podskup od $V$. Tada je $M$ potprostor od $V$ ako i samo ako vrijedi

(i) $a + b \in M, \qquad \forall a, b \in M,$

(ii) $\alpha a \in M, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall a \in M.$

**Korolar 1.29.** Neka je $V$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $M$ neprazni podskup od $V$. Tada je $M$ potprostor od $V$ ako i samo ako vrijedi

(i') $\alpha a + \beta b \in M, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \quad \forall a, b \in M.$

**Napomena 1.30.** Ako je $M \leq V$, onda je, po prethodnom korolaru, $M$ zatvoren na dvočlane linearne kombinacije svojih elemenata. Jednostavnim induktivnim elementom može se pokazati da to vrijedi i za sve (naravno, konačne) linearne kombinacije vektora iz $M$. Eksplicitno: ako je $M \leq V$, onda za $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, $a_1, \ldots, a_n \in M$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \in M$.

**Primjer 1.31.** Označimo s $\mathcal{M}_n$ skup svih kvadratnih matrica reda $n$, $\mathsf{G}$ skup svih gornjetrokutastih matrica reda $n$, a s $\mathsf{D}$ skup svih donjetrokutaskih matrica reda $n$. Vrijedi $\mathsf{G} \leq \mathcal{M}_n$ i $\mathsf{D} \leq \mathcal{M}_n$.

**Primjer 1.32.** Označimo sa $\mathsf{S}$ skup svih simetričnih matrica reda $n$, a s $\mathsf{A}$ skup svih antisimetričnih matrica reda $n$. Vrijedi $\mathsf{S} \leq \mathcal{M}_n$ i $\mathsf{A} \leq \mathcal{M}_n$.

**Primjer 1.33.** Neka je $V$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $S \subset V$. Tada je $[S]$ potprostor od $V$. **Propozicija 1.34.** Neka je $V$ vektorski prostor takav da je $\dim V = n < \infty$, te neka je $M$ potprostor od $V$. Tada je $\dim M \leq n$.
Ako je $M$ potprostor od $V$ takav da je $\dim M = n$, onda je $M = V$.

**Propozicija 1.35.** Neka je $V$ vektorski prostor te neka su $L$ i $M$ njegovi potprostori. Tada je i $L \cap M$ potprostor od $V$.

**Napomena 1.36.** Ako je $M_i$, $i \in I$, familija potprostora vektorskog prostora $V$ (pri čemu je indeksni skup $I$ proizvoljno velik, moguće i beskonačan), onda je i $\cap_{i \in I} M_i$ također potprostor od $V$.

- neka je $S$ proizvoljni neprazni podskup vektorskog prostora $V$. Tada je $[S]$ presjek svih potprostora od $V$ koji sadrže skup $S$ (te je zato $[S]$ zapravo najmanji potprostor od $V$ koji sadrži $S$).

**Definicija 1.37.** Neka je $V$ vektorski prostor, te neka su $L$ i $M$ njegovi potprostori. Suma potprostora $L$ i $M$ označava se s $L + M$ i definira kao

$$L + M = [L \cup M].$$

**Propozicija 1.38.** Neka je $V$ vektorski prostor, te neka su $L$ i $M$ njegovi potprostori. Tada je

$$L + M = \{x + y \mid x \in L, y \in M\}.$$