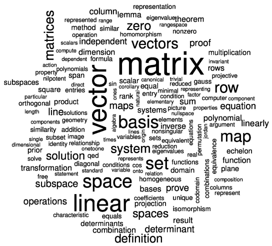

M103 Linearna algebra 1

Tema: Vježbe 14

4. 6. 2019.

predavač: Darija Marković

asistent: Darija Marković

Definicija

Neka je A kvadratna matrica reda n. Minimalni polinom matrice A je normirani polinom najmanjeg stupnja kojeg A poništava, tj. normirani polinom μ_A za koji vrijedi:

i) $\mu_A \neq 0,$
ii) $\mu_A(A) = 0,$
iii) ako za polinom p vrijedi $p(A) = 0$, tada $\mathrm{st}(p) \geq \mathrm{st}(\mu_A)$.

Napomena

1) $\mathrm{st}(\mu_A) \leq n,$
2) $\mu_A | p, \forall\, p$ takve da $p(A) = 0,$
3) nultočke od μ_A i k_A su jednake,
4) ako A ima sve jednostruke svojstvene vrijednosti, onda je $\mu_A = (-1)^n k_A$.

Zadatak 1.

Odredite svojstveni i minimalni polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

Zadatak 2.

Odredite svojstveni i minimalni polinom matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

Zadatak 3.

Odredite minimalni polinom matrice

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{bmatrix},$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4.

Neka su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pokažite da A i B imaju različite svojstvene polinome, ali jednake minimalne.

Zadatak 5.

Neka su $u = (1, 2, 4)$, $v = (2, -3, 5)$ i $w = (4, 2, -3)$ iz $\mathbb{R}^3$. Odredite:

(a) $\langle u, v \rangle$,

(b) $\langle u, w \rangle$,

(c) $\langle v, w \rangle$,

(d) $\langle u + v, w \rangle$,

(e) $||u||$,

(f) $||v||$.

Zadatak 6.

Neka je V vektorski prostor polinoma sa skalarnim produktom definiranim s

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

te neka su

$$f(t) = t + 2, \quad g(t) = 3t - 2, \quad h(t) = t^2 - 2t - 3.$$

Odredite:

(a) $\langle f, g \rangle$ i $\langle f, h \rangle$,

(b) $||f||$ i $||g||$,

(c) normirajte f i g.

Zadatak 7.

Na $M_{23}(\mathbb{R})$ definiran je skalarni produkt $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr} B^T A$. Neka su

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Odredite:

(i) $\langle A, B\rangle$, $\langle A, C\rangle$ i $\langle B, C\rangle$,

(ii) $\langle 2A + 3B, 4C\rangle$,

(iii) $||A||$ i $||B||$,

(iv) normirajte A i B.

Zadatak 8.

Odredite parametar k tako da su sljedeći parovi ortogonalni:

(a) $x = (1, 2, k, 3)$ i $y = (3, k, 7, -5)$ u $\mathbb{R}^4$,

(b) $f(t) = t + k$ i $g(t) = t^2$ ako je $\langle g, f \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.