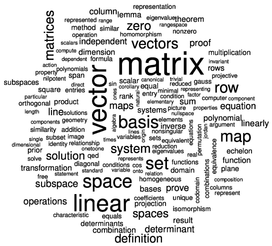

M103 Linearna algebra 1

Tema: Vježbe 11

16. 5. 2019.

predavač: Darija Marković

asistent: Darija Marković

Zadatak 1.

Neka je $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ zadana baza u $\mathbb{R}^3$. Pokažite da je formulom

$$\mathcal{A}x = \langle x, a\rangle a, \quad \langle x, a\rangle = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$$

definiran linearan operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i odredite mu matricu u bazi e ako je

$$a = e_1 + 2e_2 + 3e_3.$$

Koliki je rang matrice operatora?

Zadatak 2.

Operator $\mathcal{A} : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^2$ definiran s

$$Ap = (p(0), p(1)).$$

Dokažite da je $\mathcal{A}$ linearan operator i nađite mu matricu u paru kanonskih baza.

Zadatak 3.

Dokažite da je operator $\mathcal{A} : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{M}_2$ definiran s

$$\mathcal{A}p = \begin{bmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(1) + p(-1) & p'(1) + p'(-1) \end{bmatrix}$$

linearan. Nađite mu matricu u paru kanonskih baza te rang i defekt.

Zadatak 4.

Neka je V vektorski prostor matrica reda 2 i neka je $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.
Definirajmo operator $\mathcal{T} : V \to V$ formulom

$$\mathcal{T}(A) = MA.$$

Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{T}$ u kanonskoj bazi.

Zadatak 5.

Neka je V vektorski prostor matrica reda 2 i neka je $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
Definirajmo operator $\mathcal{T} : V \to V$ formulom

$$\mathcal{T}(A) = MA - AM.$$

Odredite matricu pridruženu operatoru u kanonskoj bazi.

Zadatak 6.

Neka je e kanonska baza u $\mathbb{R}^3$, a e' neka druga baza od $\mathbb{R}^3$, gdje je

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + e_3, \\ e_2' &= e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_3' &= 2e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Nađite prikaz vektora $x = e_1' + e_2'$ u bazi e, i vektora $y = e_1 - e_2$ u bazi e'.

Zadatak 7.

Vektor v u bazi e ima prikaz $v = 6e_1 + 9e_2 + 14e_3$. Odredite komponente tog vektora u bazi e', ako je

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 + e_2 + e_3, \\ e'_2 &= e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e'_3 &= e_1 + 2e_2 + 3e_3. \end{aligned}$$

Zadatak 8.

Odredite komponente vektora $v = 6e_1 + 4e_2 + 5e_3 + e_4$ u bazi e', ako je

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \\ e'_2 &= e_1 + e_2 - e_3 - e_4, \\ e'_3 &= e_1 - e_2, \\ e'_4 &= e_3 - e_4. \end{aligned}$$

Zadatak 9.

Operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ u kanonskoj bazi e ima matricu

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{A}$ u bazi e', ako je

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2, \\ e_2' &= e_1 - e_2. \end{aligned}$$

Neka je $x = (2, 1)$ u kanonskoj bazi. Odredite $[\mathcal{A}x]^e$ i $[\mathcal{A}x]^{e'}$.

Zadatak 10.

Neka je $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearni operator, e kanonska baza u $\mathbb{R}^3$, a e' neka druga baza, pri čemu je

$$\begin{aligned} e'_1 &= 3e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e'_2 &= 2e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e'_3 &= -e_1 + 2e_2 + 5e_3. \end{aligned}$$

Neka je operatoru $\mathcal{A}$ u bazi e pridružena matrica

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{A}$ u bazi e'.

Zadatak 11.

`Domaća zadaća`

Operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ u bazi e ima matricu

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{A}$ u bazi e', ako je

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1, \\ e_2' &= e_2 - 3e_3, \\ e_3' &= \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3. \end{aligned}$$

Zadatak 12.

`Domaća zadaća`

Operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ u bazi e ima matricu

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{A}$ u bazi e', ako je

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 - e2, \\ e_2' &= e_1 + e_2, \\ e_3' &= e_3. \end{aligned}$$

Zadatak 13.

Linearan operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ zadan je svojim djelovanjem na vektor $x \in \mathbb{R}^3$ tako da je

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (3x_2+3x_3, x_1-2x_3, -x_1+4x_2+x_3, -2x_1+2x_2-x_3).$$

Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{A}$ u paru kanonskih baza (e, f), te u paru baza (e', f) gdje je

$$\begin{aligned} e_1' &= (1, 1, 1), \\ e_2' &= (1, 0, 1), \\ e_3' &= (1, 0, 0). \end{aligned}$$

Zadatak 14.

Linearan operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadan je svojim djelovanjem na vektor $x \in \mathbb{R}^2$ tako da je

$$\mathcal{A}(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_1 - 2x_2, x_1 + 3x_2).$$

(a) Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{A}$ u paru kanonskih baza (e, f) te u paru baza (e', f') gdje je

$$e'_1 = (1, 3), \quad e'_2 = (2, 5),$$

$$f'_1 = (1, 1, 1), \quad f'_2 = (1, 1, 0), \quad f'_3 = (1, 0, 0).$$

(b) Odredite matricu pridruženu operatoru $\mathcal{A}$ u paru baza (e', f') gdje je

$$e_1' = (1, 2)$$
$$e_2' = (1, 1)$$

$$f_1' = (2, 1, 0)$$
$$f_2' = (0, 2, 1)$$
$$f_3' = (0, 0, -1)$$

Zadatak 15.

Neka su e, f, g redom kanonske baze za $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4$. Dani su linearni operatori $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ te $\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ s

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2 + 2x_3), \\
\mathcal{B}(x_1, x_2) &= (x_1, -x_1 + x_2, -x_2, x_1 + x_2).
\end{aligned}$$

Pokažite da je $[\mathcal{B}\mathcal{A}]_e^g = [\mathcal{B}]_f^g [\mathcal{A}]_e^f$.