



Zadatak 1.

Neka je $\mathcal{F} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linearni operator definiran s

$$\mathcal{F}(x, y, z, s, t) = (x+2y+z-3s+4t, 2x+5y+4z-5s+5t, x+4y+5z-s-2t).$$

Odredite bazu i dimenziju za sliku od \mathcal{F} .





Zadatak 2.

Domaća zadaća

Neka je $\mathcal{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linearni operator definiran s

$$\mathcal{G}(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z).$$

Odredite bazu i dimenziju za jezgru od \mathcal{G} .





Zadatak 3.

Neka je $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ operator definiran s

$$\mathcal{A}(1, 0, 0) = (3, 1)$$

$$\mathcal{A}(0, 1, 0) = (0, 1)$$

$$\mathcal{A}(0, 0, 1) = (1, 1)$$

Dokažite da je $d(\mathcal{A}) = 1$.





Zadatak 4.

Neka je $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza trodimenzionalnog vektorskog prostora V i neka je $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ linearan operator definiran s

$$\mathcal{A}e_1 = e_1 + e_2 - e_3$$

$$\mathcal{A}e_2 = e_1 - e_2 + e_3$$

$$\mathcal{A}e_3 = e_1 - 3e_2 + 3e_3$$

Nadite baze za sliku i jezgru operatora \mathcal{A} .





Zadatak 5.

- (a) Odredite bazu i dimenziju $\text{Im } \mathcal{G}$ i $\text{Ker } \mathcal{G}$ ako je $\mathcal{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linearni operator definiran s

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$$

- (b) Neka je $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ operator definiran s

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, 2x_1, -x_2, -4x_1 - 3x_2).$$

Dokažite da je \mathcal{A} linearan operator, nađite baze za sliku i jezgru te odredite rang i defekt.





Zadatak 6.

Odredite linearni operator $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ čija je slika razapeta s $(1, 2, 0, -4)$ i $(2, 0, -1, -3)$.





Zadatak 7.

Domaća zadaća

Odredite linearni operator $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ čija je slika razapeta s $(1, 2, 3)$ i $(4, 5, 6)$.





Zadatak 8.

Neka je V vektorski prostor matrica reda 2 nad \mathbb{R} i neka je

$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Neka je $\mathcal{F} : V \rightarrow V$ linearni operator definiran s

$$\mathcal{F}(A) = AM - MA.$$

Odredite bazu i dimenziju za $\text{Ker } \mathcal{F}$.





Zadatak 9.

Odredite sve vrijednosti parametara $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da je operator $\mathcal{A} : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$ dan s

$$\mathcal{A}p(t) = (tp(t) - 2t)' + \alpha(p''(t) + 1)^2 + \beta(p''(t))^2$$

linearan. Za svaki odabir parametara $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ odredite po jednu bazu za sliku i jezgru od \mathcal{A} .





Zadatak 10.

Domaća zadaća

Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ parametri, te neka je operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dan s

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1 - \alpha^2 x_2 - (1 + \alpha)\beta x_3, x_1 + (\alpha^2 - 1)x_2 - \alpha x_3, -x_1 + (1 - \beta^2)x_2 + x_3 - \beta)$$

Odredite parametre α, β tako da je \mathcal{A} linearan operator. Takvom linearnom operatoru \mathcal{A} odredite sliku, jezgru, rang i defekt u ovisnosti o parametrima α, β .

