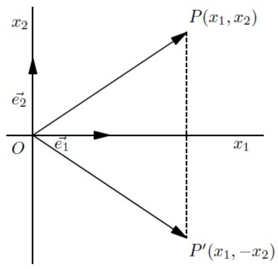
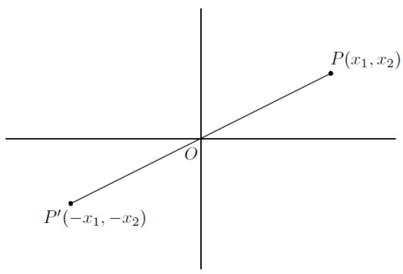
Linearni operatori.

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

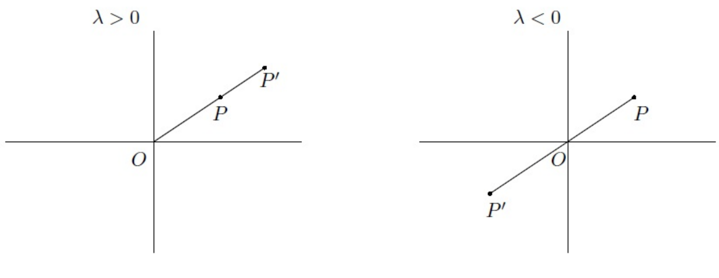
Primjer 2.1. (Simetrija ravnine M u odnosu na prvu koordinatnu os) Ako je $P \in M$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2), onda je njena osno simetrična slika obzirom na prvu koordinatnu os točka P' s koordinatama $(x_1, -x_2)$.



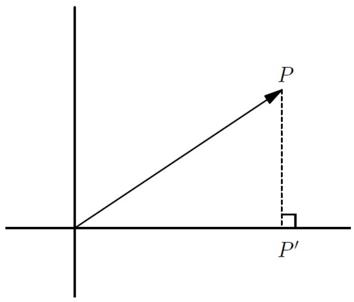
Primjer 2.2. (Centralna simetrija ravnine M u odnosu na ishodište O koordinatnog sustava) Ako je $P \in M$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2), onda je njena centralno simetrična slika u odnosu na ishodište O koordinatnog sustava točka P' s koordinatam $(-x_1, -x_2)$.



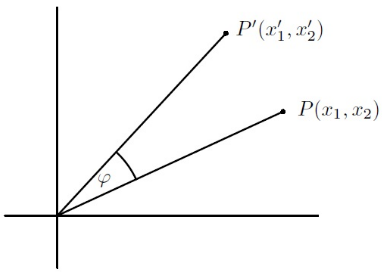
Primjer 2.3. (Homotetija ravnine M u odnosu na ishodište O koordinatnog sustava) Ako je $P \in M$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2), onda je njena homotetična slika u odnosu na ishodiĹˇte O koordinatnog sustava točka P' s koordinatama $(\lambda x_1, \lambda x_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.



Primjer 2.4. (Ortogonalna projekcija ravnine M na prvu koordinatnu os) Ako je $P \in M$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2), onda je njena ortogonalna projekcija na prvu koordinatnu os točka P' s koordinatama $(x_1, 0)$.



Primjer 2.5. (Rotacija ravnine M za kut φ oko ishodišta O koordinatnog sustava) Ako je $P \in M$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2), može se pokazati da rotacijom za kut φ oko ishodišta O koordinatnog sustava dobivamo točku P' s koordinatama $(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi, x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi)$.



Definicija 2.6. Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ zove se linearan operator ako vrijedi

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y, \qquad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Napomena 2.7.

(a) Definiciona jednakost

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y, \qquad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},$$

naziva se linearnost preslikavanja A. Odavde odmah slijedi

$$A(x + y) = Ax + Ay, \qquad \forall x, y \in V$$

(ako se uzme $\alpha = \beta = 1$), te

$$A(\alpha x) = \alpha A x, \qquad \forall x \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$$

(ako se uzme $\beta = 0$). Ova se svojstva zovu aditivnost i homogenost. Dakle, svaki je linearan operator aditivno i homogeno preslikavanje.

(b) Svaki linearan operator nulvektor prevodi u nulvektor:

$$A0 = 0.$$

(c) Ako je $A : V \to W$ linearan operator, jednostavnim induktivnim argumentom pokazuje se da tada vrijedi i

$$A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A x_i, \qquad \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in V, \\ \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}. \end{array}$$

Često se zato kaže da linearni operatori poštuju linearne kombinacije. Ovo svojstvo pokazuje da je djelovanje linearnih operatora u punoj mjeri usklađeno s algebarskom strukturom vektorskih prostora.

Primjer 2.8.

1. Preslikavanja iz Primjera 2.1. do 2.5. su linearni operatori na $X_0(M)$.

2. Preslikavanje $P : X_0(E) \to X_0(E)$ definirano s

$$P(\overrightarrow{OT}) = \overrightarrow{OT'},$$

gdje je $T = (x, y, z)$ i $T' = (x, y, 0)$, je linearan operator; P se naziva ortogonalni projektor prostora $X_0(E)$ na $X_0(M)$ (pri čemu smo prostor $X_0(M)$ identificirali s potprostorom od $X_0(E)$ kojeg čine svi radijvektori čije završne točke leže u $xy-$ravnini).

3. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0),$$

je linearan operator. Može se uočiti da je ovaj operator apstraktna realizacija ortogonalnog projektora P iz prethodnog primjera.

4. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$A(x_1, x_2) = (6x_1 - x_2, -2x_1 + x_2, x_1 - 7x_2),$$

je linearan operator.

5. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$A(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2 + 5),$$

nije linearan operator.

6. Transponiranje matrica $T : \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{F})$,

$$T(A) = A^T,$$

je linearan operator.

7. Hermitsko adjungiranje matrica $H : \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{C})$,
$$H(A) = A^*,$$
nije linearan operator.

8. $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ je linearan operator.

9. $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ nije linearan operator.

10. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 4x_3,$$
je linearan operator.

11. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zadani realni brojevi. Preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$
je linearan operator.

12. $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$,
$$Dp = p',$$
pri čemu je p' derivacija polinoma p, je linearan operator.

13. Neka su V i W proizvoljni vektorski prostori nad istim poljem. Tada je preslikavanje $0 : V \to W$, definirano s
$$0x = 0, \qquad \forall x \in V,$$
linearan operator. Ovaj operator se naziva nuloperator.

14. Neka je V proizvoljan vektorski prostor. Identitet $I : V \to V$ je linearan operator. Često se kaže da je I jedinični operator.

15. $D : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$,
$$Dp = p',$$
je linearan operator.

16. $S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots),$$
je linearan operator.

17. $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots),$$
je linearan operator.

Napomena 2.9. Pretpostavimo da je $A : V \to W$ linearan operator te da je $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, baza prostora V. Uzmimo proizvoljan $x \in V$ i napišimo ga u obliku

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i.$$

Sada je, prema napomeni 2.7.(c),

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A b_i.$$

Odavde zaključujemo: poznajemo li vektore $Ab_1, \ldots, Ab_n$, onda implicitno poznajemo i Ax, za svaki vektor x iz domene.

Propozicija 2.10. (Zadavanje na bazi i proširenje po linearnosti). Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$, neka je $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bilo koja baza za V i $(w_1, \ldots, w_n)$ bilo koja uređena $n-$torka vektora iz W. Tada postoji jedinstven linearan operator $A : V \to W$ takav da je

$$Ab_i = w_i, \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Propozicija 2.11. Neka je $A : V \to W$ linearan operator.

(i) Ako je $L \leq V$, onda je $A(L) \leq W$.

(ii) Ako je $M \leq W$, onda je $A^{-1}(M) \leq V$.

Definicija 2.12. Neka je $A : V \to W$ linearan operator. Potprostori

$$\operatorname{Im} A = A(V) = \{Av \ : \ v \in V\} \leq W$$

i

$$\operatorname{Ker} A = A^{-1}(\{0\}) = \{x \in V \ : \ Ax = 0\} \leq V$$

zovu se slika, odnosno jezgra operatora A. Kad su V i W konačnodimenzionalni, rang i defekt operatora A definiraju se kao brojevi

$$\mathrm{r}(A) = \dim(\operatorname{Im} A),$$

odnosno

$$\mathrm{d}(A) = \dim(\operatorname{Ker} A).$$

Napomena 2.13. Pretpostavimo da je $A : V \to W$ linearan operator te da je $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, bilo koja baza prostora V. Sada za proizvoljan

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in V$$

imamo

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A b_i,$$

što pokazuje da je skup $\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}$ sustav izvodnica za $\mathrm{Im}\, A$. Vrijedi, dakle,

$$\mathrm{Im} A = [\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}] \quad \mathrm{i} \quad \mathrm{r}(A) = \dim(\mathrm{Im}\, A) \leq n.$$

Propozicija 2.14. Linearan operator $A : V \to W$ je injekcija ako i samo ako je

$$\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$$

(tj. ako i samo ako je $\mathrm{d}(A) = 0$).

Propozicija 2.15. Neka je $A : V \to W$ linearan operator. A je injekcija ako i samo ako je za svaki linearno nezavisan skup S u V skup

$$A(S) = \{Ax \; : \; x \in S\}$$

linearno nezavisan u W.

Teorem 2.16. (Teorem o rangu i defektu) Neka je $A : V \to W$ linearan operator, te neka je $\dim V < \infty$. Tada je

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{d}(A) = \dim V.$$

Definicija 2.17. Linearan operator $A : V \to W$ naziva se:

(i) monomorfizam ako je A injekcija;

(ii) epimorfizam ako je A surjekcija;

(iii) izomorfizam ako je A bijekcija.

Korolar 2.18. Neka je $A : V \to W$ linearan operator te neka je $\dim V = \dim W < \infty$. Sljedeći uvjeti su međusobno ekvivalentni:

(i) A je monomorfizam;

(ii) A je epimorfizam;

(iii) A je izomorfizam.

Propozicija 2.19. Neka je $A : V \to W$ linearan operator, te neka je $\dim V = n < \infty$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:

(i) A je izomorfizam;

(ii) za svaku bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ od V skup $\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}$ je baza za W;

(iii) postoji baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ od V takva da je skup $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ baza za W.

Propozicija 2.20. Neka su $A : V \to W$ i $B : W \to X$ linearni operatori. Tada je i $BA : V \to X$ linearan operator. Posebno, kompozicija dvaju monomorfizama (epimorfizama, izomorfizama) je opet monomorfizam (epimorfizam, izomorfizam).

Definicija 2.21. Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem. Kažemo da je V izomorfan s W (i pišemo $V \simeq W$) ako postoji izomorfizam $A : V \to W$.

Propozicija 2.22. Neka su V i W konačnodimenzionalni prostori nad istim poljem. Tada je $V \simeq W$ ako i samo ako vrijedi

$$\dim V = \dim W.$$

Posebno, izomorfnost prostora je relacija ekvivalencije.

Napomena 2.23. U prethodnoj propoziciji dokazali smo da je izomorfnost relacija ekvivalencije samo kad se govori o konačnodimenzionalnim prostorima jer smo u dokazu bitno koristili teorem o rangu i defektu, odnosno njegove posljedice, kao i proceduru zadavanja operatora na bazi. Tvrdnja, međutim, vrijedi i općenito. To je zato što se i bez pozivanja na jednakost dimenzija može direktno dokazati da je $\simeq$ simetrična relacija. Lako se, naime, vidi da vrijedi i ova, sama po sebi korisna, tvrdnja:
Ako je

$$A : V \to W$$

izomorfizam, onda je i inverzno preslikavanje

$$A^{-1} : W \to V$$

linearno te je zato i A^{-1} izomorfizam.

Napomena 2.24. Ako je $A : V \to V$ linearan i bijektivan, češće se kaže da je A regularan ili invertibilan operator. Termin izomorfizam je rezerviran za operatore između različitih prostora. U toj terminologiji za operatore koji nisu regularni kaže se da su singularni.
Zamislimo sada da za operatore $A, B : V \to V$, $\dim V < \infty$, vrijedi $AB = I$. Tada su oba operatora regularna i vrijedi $A = B^{-1}$, a onda i $A^{-1} = B$.
Zaista, iz $AB = I$ slijedi da je B injekcija. Prema korolaru 2.18. B je zato regularan pa postoji B^{-1}. Ako sad na relaciju $AB = I$ djelujemo s desne strane s B^{-1}, dobivamo $A = B^{-1}$.

Prostor linearnih operatora

- V i W vektorski prostori nad istim poljem. S $L(V,W)$ označavamo skup svih linearnih operatora s prostora V u prostor W.

Definicija 2.25. Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Za $A, B \in L(V,W)$ definira se $A+B : V \to W$ s

$$(A+B)x = Ax + Bx.$$

Nadalje, za $A \in L(V,W)$ i $\alpha \in \mathbb{F}$, definira se $\alpha A : V \to W$ s

$$(\alpha A)x = \alpha Ax.$$

Teorem 2.26. Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Tada je i $L(V,W)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

Teorem 2.27. Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem. Tada je

$$\dim L(V,W) = \dim V \cdot \dim W.$$

- u specijalnom slučaju kada je $V = W$, umjesto $L(V,V)$ ćemo pisati $L(V)$

Propozicija 2.28. Neka je V vektorski prostor. Skup $L(V)$ je asocijativna algebra s jedinicom, tj. vrijedi:

(1) $L(V)$ je vektorski prostor;

(2) $A(BC) = (AB)C, \quad \forall A, B, C \in L(V)$;

(3) $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC, \quad \forall A, B, C \in L(V)$;

(4) $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B), \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \ \forall A, B \in L(V)$;

(5) $\exists I \in L(V)$ takav da je $AI = IA = A, \quad \forall A \in L(V)$.

Matrični zapis linearnog operatora

- V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza za V. Svaki vektor $x \in V$ ima jedinstven prikaz oblika
$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$
- matrični zapis (prikaz) vektora x u bazi e
$$[x]^e = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{F})$$

Propozicija 2.29. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza za V. Preslikavanje
$$\varphi : V \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{F}), \quad \varphi(x) = [x]^e$$
je izomorfizam.

- $A \in L(V, W)$, $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze za V, odnosno W
- A potpuno određen svojim djelovanjem na bazi: ako znamo $Ae_1, \ldots, Ae_n$, onda znamo kompletno djelovanje operatora A
- $Ae_1, \ldots, Ae_n \in W$ možemo pisati u obliku
$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$
- matrični zapis (prikaz) operatora A u paru baza (e, f)
$$[A]_e^f = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$$

Propozicija 2.30. Neka su V i W vektorski prostori nad $\mathbb{F}$, neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze za V, odnosno W. Preslikavanje
$$\Phi : L(V, W) \to \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F}), \quad \Phi(A) = [A]_e^f,$$
je izomorfizam.

Primjer 2.31. Neka su e i f kanonske baze u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$. Odredimo matrični zapis operatora $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$,

$$A(x_1, x_2) = (6x_1 - x_2, -2x_1 + x_2, x_1 - 7x_2)$$

u ovom paru baza.

Primjer 2.32. Neka je $e = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ kanonska baza u prostoru $V^2(0)$. Odredimo matrični zapis operatora rotacije za kut φ, $R_\varphi \in L(V^2(0))$, u paru baza (e, e).

Primjer 2.33. Neka je $A \in L(\mathbb{R}^3)$ definiran s

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$$

(A se može shvatiti kao projektor na $xy-$ravninu). Ako je e kanonska baza u $\mathbb{R}^3$, odredimo matrični zapis operatora u paru baza (e, e).

Primjer 2.34. Neka je $V = L \dotplus M$ pri čemu je $\dim L = k$ i $\dim V = n$. Znamo da tada svaki vektor $x \in V$ ima jedinstven zapis u obliku $x = a + b,\ a \in L, b \in M$. Neka je sada preslikavanje $P : V \to V$ definirano formulom

$$Px = a.$$

P se zove projektor na potprostor L u smjeru potprostora M.

Primjer 2.35. Pogledajmo operator deriviranja

$$D \in L(\mathcal{P}_n), \quad Dp = p'$$

na prostoru polinoma $\mathcal{P}_n$.

Napomena 2.36. Za $A \in L(V, W)$ pišemo

$$[A]_e^f = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}.$$

Sjetimo se baze $\{E_{ij}\ :\ i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ prostora $L(V, W)$ koju smo konstruirali u dokazu teorema 2.27. Lako se vidi da u toj bazi operatoru A pripada rastav

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij},$$

gdje su α_{ij} upravo matrični koeficijenti iz matrice $[A]_e^f$.

Propozicija 2.37. Neka su $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ baze vektorskih prostora V i W, neka je $x \in V$ i $A \in L(V, W)$. Tada je

$$[Ax]^f = [A]_e^f [x]^e.$$

Propozicija 2.38. Neka su redom $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ i $g = \{g_1, \ldots, g_l\}$ baze vektorskih prostora V, W i X, neka je $A \in L(V, W)$ i $B \in L(W, X)$. Tada za operator $BA \in L(V, X)$ vrijedi

$$[BA]_e^g = [B]_f^g [A]_e^f.$$

Napomena 2.39. Isprva se definicija matričnog množenja uvijek čini kao zamršen i neintuitivan koncept. Sad, nakon prethodnih dviju propozicija, vidimo stvarnu prirodu te definicije. Matrično množenje je, zapravo, i definirano tako kako jest upravo zato da bismo imali pravila računanja kakva su iskazana u prethodnim dvjema propozicijama.

Propozicija 2.40. Neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze vektorskih prostora V i W, te neka je $A \in L(V, W)$. Tada je

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A]_e^f).$$

Korolar 2.41. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za V. Tada je

$$\Phi : L(V) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F}), \quad \Phi(A) = [A]_e^e$$

izomorfizam algebri.

Korolar 2.42. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za V. Operator $A \in L(V)$ je regularan ako i samo ako je $[A]_e^e$ regularna matrica.

Teorem 2.43. Neka je $A \in L(V, W)$ i neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ te $f = \{f_1, \ldots, f_m\}, f' = \{f'_1, \ldots, f'_m\}$ po dvije baze prostora V, odnosno W. Neka su operatori $T \in L(W)$ i $S \in L(V)$ definirani na bazama f, odnosno e, s

$$Tf_i = f'_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

i

$$Se_j = e'_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Tada je

$$[A]_{e'}^{f'} = ([T]_f^f)^{-1} [A]_e^f [S]_e^e$$

Definicija 2.44. Matrica

$$[S]_e^e = [I]_{e'}^e,$$

zove se matrica prijelaza iz baze e u bazu e'.

Korolar 2.45. Neka je $A \in L(V)$, neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze za V te neka je $[S]_e^e = [I]_{e'}^e$, matrica prijelaza iz baze e u bazu e'. Tada je

$$[A]_{e'}^{e'} = ([S]_e^e)^{-1} [A]_e^e [S]_e^e$$

Korolar 2.46. Neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze za V, neka je $[S]_e^e = [I]_{e'}^e$, matrica prijelaza iz baze e u bazu e'. Tada je

$$([S]_e^e)^{-1} = ([I]_{e'}^e)^{-1},$$

matrica prijelaza iz baze e' u bazu e.

Korolar 2.47. Neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze za V, neka je $[S]_e^e = [I]_{e'}^e$, matrica prijelaza iz baze e u bazu e'. Tada za svaki vektor x iz V vrijedi

$$[x]^{e'} = ([S]_e^e)^{-1}[x]^e.$$

Primjer 2.48. Neka je e kanonska baza u $\mathbb{R}^2$, a $e' = \{e'_1, e'_2\}$, $e'_1 = (2, -1)$, $e'_2 = (-1, 1)$. Neka je operator $A \in L(\mathbb{R}^2)$ zadan s

$$A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

te neka je $x = (1, 1)$. Izračunat ćemo $[Ax]^e$ i $[Ax]^{e'}$.

Definicija 2.49. Neka su $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Kažemo da je matrica B slična matrici A ako postoji regularna matrica $S \in GL(n, \mathbb{F})$ takva da je

$$B = S^{-1}AS.$$

Korolar 2.50. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Matrični prikazi operatora A u raznim bazama su slične matrice.

Napomena 2.51. Često se nameće potreba za obratnim postupkom: za danu matricu A trebamo naći linearan operator čiji će matrični zapis u nekom paru baza (ili u nekoj bazi, ako je matrica kvadratna) biti upravo A. Evo kako to možemo učiniti. Neka je zadana matrica $A = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$.
Uzmimo dva vektorska prostora V i W nad $\mathbb{F}$ tako da je $\dim V = n$ i $\dim W = m$, zatim neke baze $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ u V i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ u W te uz pomoć propozicije 2.10. definirajmo $\tilde{A} \in L(V, W)$ formulom

$$\tilde{A}e_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Jasno je da vrijedi $[\tilde{A}]_e^f = A$.
Još uočimo: ako je polazna matrica A kvadratna onda se može uzeti $W = V$ i $f = e$.

Napomena 2.52. Neka je $Ax = b$ proizvoljan sustav linearnih jednadžbi i $Ax = 0$ pridružen homogeni sustav.
Uvedemo li kao u prethodnoj napomeni prostore V i W, operator $\tilde{A}$ i (analognim postupkom) vektor $\tilde{b} \in W$ takav da je

$$[\tilde{b}]^f = b,$$

primjenom propozicija 2.29. , 2.30. i 2.37. rješavanje polaznog sustava svodi se na rješavanje vektorske jednadžbe

$$\tilde{A}x = \tilde{b}.$$

To omogućuje alternativni (i zapravo znatno brži i elegantniji) tretman sustava linearnih jednadžbi. Npr. informacija o dimenziji prostora rješenja homogenog sustava dobije se sada kao direktna posljedica teorema o rangu i defektu.

Spektar

- za $A \in L(V)$ na nekom konačnodimenzionalnom prostoru V, cilj nam je naći takvu bazu prostora V u kojoj će matrica operatora A biti čim jednostavnija
- najjednostavnije bi bilo ako bismo postigli da u nekoj bazi $a = \{a_1, \dots, a_n\}$ prostora V operatoru A pripada dijagonalna matrica

$$[A]_a^a = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

- iz matričnog zapisa linearnog operatora odmah slijedi da je dijagonalan matrični zapis u bazi a ekvivalentan sustavu jednakosti:

$$Aa_1 = \alpha_1 a_1, \quad Aa_2 = \alpha_2 a_2, \quad \dots, \quad Aa_n = \alpha_n a_n$$

Definicija 2.53. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Kaže se da je skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost operatora A ako postoji vektor $x \in V$, $x \neq 0$, takav da je

$$Ax = \lambda_0 x.$$

Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se spektar (operatora A) i označava sa $\sigma(A)$.

- koriste se još termini karakteristična vrijednost i vlastita vrijednost, a u engleskom jeziku naziv eigenvalue

Napomena 2.54.

(a) vektor x iz navedene definicije naziva se svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Treba primijetiti da svojstveni vektor nikako nije jedinstven: ako je x svojstveni vektor pridružen λ_0 onda je i αx svojstveni vektor pridružen istoj svojstvenoj vrijednosti, i to za svaki skalar α iz $\mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$

(b) neka je
$$V_A(\lambda_0) = \{x \in V \;:\; Ax = \lambda_0 x\}.$$
Ovaj skup se naziva svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Uočimo da je $V_A(\lambda_0)$ zaista potprostor jer evidentno vrijedi
$$V_A(\lambda_0) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 I).$$
Primijetimo da je skup $V_A(\lambda) = \{x \in V \;:\; Ax = \lambda x\}$ uvijek, za svaki skalar λ, potprostor od V. Svojstvene vrijednosti su oni skalari λ_0 za koje je potprostor $V_A(\lambda_0)$ netrivijalan. Zaključujemo: svojstvena vrijednost operatora A je takav skalar λ_0 za koji je operator $A - \lambda_0 I$ singularan.

(c) ako je $\lambda_0 \in \sigma(A)$ onda se dimenzija svojstvenog potprostora $V_A(\lambda_0)$ naziva geometrijska kratnost (ili geometrijski multiplicitet) svojstvene vrijednosti λ_0 i označava se s $d(\lambda_0)$. Iz definicije je jasno da je
$$d(\lambda_0) \geq 1.$$

Primjer 2.55. Operator $A \in L(X_0(M))$ simetrije ravnine M u odnosu na prvu koordinatnu os prostoru $X_0(M)$ ima svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$; naime $A\vec{i} = \vec{i}$ i $A\vec{j} = -\vec{j}$. Geometrijski je očito (u što ćemo se kasnije uvjeriti i formalno) da su to jedine dvije svojstvene vrijednosti ovog operatora.

Primjer 2.56. Operator $R_\varphi \in L(V^2(0))$ rotacije za kut $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$, $\varphi \neq 0, \pi$, nema svojstvenih vrijednosti. Zaista, jednakost
$$R_\varphi \vec{a} = \lambda_0 \vec{a}$$
znači da su vektori $R_\varphi \vec{a}$ i $\vec{a}$ kolinearni, a takvih netrivijalnih vektora pri rotaciji za kut $\varphi \neq 0, \pi$ očito nema.

Definicija 2.57. Neka je $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Polinom
$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
naziva se svojstveni polinom matrice A.

Propozicija 2.58. Slične matrice imaju jednake svojstvene polinome.

Definicija 2.59. Neka je V konačnodimenzionalan prostor, neka je $A \in L(V)$ te neka je $[A]_e^e$ matrični zapis operatora A u nekoj bazi e prostora V. Svojstveni polinom operatora A, k_A, definira se kao svojstveni polinom matrice $[A]_e^e$:

$$k_A(\lambda) = k_{[A]_e^e}(\lambda)$$

Primjer 2.60. Odredimo svojstveni polinom operatora rotacije iz primjera 2.56.

Teorem 2.61. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ te neka je $A \in L(V)$. Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako vrijedi

$$k_A(\lambda_0) = 0.$$

Napomena 2.62. U osnovi, teorem 2.61. tvrdi da su svojstvene vrijednosti operatora upravo nultočke njegovog svojstvenog polinoma. Primijetimo, međutim, da je jedna od pretpostavki teorema $\lambda_0 \in \mathbb{F}$. To konkretno znači da su u realnim prostorima svojstvene vrijednosti samo realne nultočke svojstvenog polinoma.

Napomena 2.63. Ako je $\dim V = n$ i $A \in L(V)$ onda A ima najviše n svojstvenih vrijednosti. Ovo je neposredna posljedica tvrdnje teorema 2.61. jer polinom $n-$tog stupnja ima najviše n nultočaka.

Napomena 2.64. Sve do sada izbor polja u našim razmatranjima nije igrao nikakvu ulogu. Teorem 2.61. očito predstavlja mjesto na kojem se teorija počinje dijeliti na realnu i kompleksnu. S jedne strane, polje kompleksnih brojeva je algebarski zatvoreno, i zato svaki operator na konačnodimenzionalnom kompleksnom prostoru ima svojstvenu vrijednost. Nasuprot tomu, polje $\mathbb{R}$ nije algebarski zatvoreno, tj. ima polinoma s realnim koeficijentima bez realnih nultočaka.

Primjer 2.65. Uzmimo operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ dan svojim matričnim prikazom u kanonskoj bazi e prostora $\mathbb{R}^3$:

$$[A]_e^e = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odredimo spektar i svojstvene vektore operatora A.

Definicija 2.66. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor te neka je $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Neka je

$$k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l p(\lambda), \quad p(\lambda_0) \neq 0, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Broj l zovemo algebarskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ_0 i označavamo ga s $l(\lambda_0)$.

Teorem 2.67. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, te neka je $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Tada je

$$d(\lambda_0) \leq l(\lambda_0).$$

Napomena 2.68. Već znamo da za proizvoljan linearan operator općenito nije moguće naći bazu u kojoj bi njegova matrica bila dijagonalna. Osnovna smetnja je nedostatak svojstvenih vrijednosti (jer smo vidjeli da su dijagonalni koeficijenti u dijagonalnom matričnom zapisu zapravo svojstvene vrijednosti operatora).
Prethodni teorem (i primjer 2.65.) pokazuje još jednu moguću zapreku za egzistenciju dijagonalnoga matričnog zapisa danog operatora. Ukoliko je za neku svojstvenu vrijednost λ_0 njezina geometrijska kratnost $d(\lambda_0)$ strogo manja od algebarske kratnosti $l(\lambda_0)$, onda je evidentno nemoguće naći bazu u kojoj bi taj operator imao dijagonalnu matricu.

Propozicija 2.69. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, neka je $A \in L(V)$, neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ međusobno različite svojstvene vrijednosti operatora A te neka su $x_1, \ldots, x_k$ svojstveni vektori pridruženi, redom, svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Tada je skup $\{x_1, \ldots, x_k\}$ linearno nezavisan.

Teorem 2.70. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, $A \in L(V)$, te neka je $e^{(i)} = \{e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \ldots, e_{d_i}^{(i)}\}$ baza za svojstveni potprostor $V_A(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Tada je unija $\bigcup_{i=1}^k e^{(i)}$ linearno nezavisan skup u V.

Korolar 2.71. Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor, neka je $A \in L(V)$ te neka je

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}.$$

Operator A se može dijagonalizirati (tj. postoji baza od V u kojoj je matrični prikaz operatora A dijagonalna matrica) ako i samo ako su geometrijska i algebarska kratnost svih svojstvenih vrijednosti od A jednake.

Napomena 2.72. Sva prethodna razmatranja o spektru, svojstvenim vrijednostima, svojstvenim potprostorima, dijagonalizaciji ... proveli smo za linearne operatore na konačnodimenzionalnim prostorima. Često se, međutim, govori o istim pojmovima vezanim za neku matricu bez referiranja na neki određeni operator. Tako se onda govori o spektru matrice ili o dijagonalizaciji kvadratne matrice.

Definicija 2.73. Neka je V vektorski prostor i $A \in L(V)$. Kaže se da je potprostor $M \leq V$ invarijantan za A ako vrijedi

$$A(M) \subseteq M,$$

tj. $Ax \in M$, $\forall x \in M$.

Teorem 2.74. (Hamilton-Cayley) Neka je $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Tada je

$$k_A(A) = 0.$$

Korolar 2.75. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada je

$$k_A(A) = 0.$$

Propozicija 2.76. Matrica $A \in \mathcal{M}_n$ je regularna ako i samo ako je

$$k_A(0) \neq 0.$$

Minimalni polinom

$$\begin{array}{ll} \{I\} & \text{nezavisan skup} \\ \{I, A\} & \\ \{I, A, A^2\} & \updownarrow \\ - - - - - - - & \\ \{I, A, \ldots, A^n\} & \text{zavisan skup} \end{array}$$

- postoji m, $1 \leq m \leq n$, takav da je

$$\begin{array}{ll} \{I, A, \ldots, A^{m-1}\} & \text{linearno nezavisan} \\ \{I, A, \ldots, A^{m-1}, A^m\} & \text{linearno zavisan} \end{array}$$

$$A^m = \mu_1 A^{m-1} + \mu_2 A^{m-2} + \cdots + \mu_m I$$

$$\mu_A(\lambda) = \lambda^m - \mu_1 \lambda^{m-1} - \cdots - \mu_m$$

- vrijedi

$$\mu_A(A) = 0$$

- polinom μ_A zovemo minimalni polinom

Propozicija 2.77. Ne postoji polinom kojeg matrica A poništi, a čiji bi stupanj bio niži od stupnja minimalnog polinoma.

Propozicija 2.78. Ne postoji normiran polinom kojeg matrica A poništi koji bi imao stupanj jednak stupnju minimalnog polinoma, a koji bi bio od njega različit.

Propozicija 2.79. Minimalni polinom realne matrice ima realne koeficijente i kad se A promatra u $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tj. kao specijalni slučaj kompleksne matrice.

Propozicija 2.80. Svaki polinom P stupnja $p > m$ kojeg A poništi dijeljiv je s μ_A.

Propozicija 2.81. Nultočke svojstvenog polinoma su i nultočke minimalnog polinoma.

Primjer 2.82. Zadane su matrice

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & \\ & \lambda_0 & \\ & & \lambda_0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & \\ & \lambda_0 & \\ & & \lambda_0 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & \\ & \lambda_0 & 1 \\ & & \lambda_0 \end{bmatrix}.$$

Odredite minimalne polinome!

Propozicija 2.83. Slične matrice imaju isti minimalni polinom što znači da imaju isti skup nultočaka, te da su im višestrukosti pojedine nultočke iste.