Odjel za fiziku, Sveučilište u Osijeku 12. lipnja 2019.

Drugi kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. Dokažite da je operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ definiran s

$$A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3)$$

regularan, odredite mu matrični prikaz u kanonskoj bazi, odredite pomoću svojstvenog polinoma inverz matrice $[A]_e^e$ te odredite formulu prema kojoj djeluje inverzni operator A^{-1}.

Zadatak 2. Na vektorskom prostoru $\mathcal{M}_2$ definiran je standardni skalarni produkt. Neka je zadan potprostor

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 \ : \ a + b - c + d = 0,\ a - b + 2d = 0 \right\}.$$

Odredite njegov ortogonalni komplement, te po jednu ortonormiranu bazu za M i $M^\perp$.

Zadatak 3. Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & x & 1 \end{bmatrix}$$

odredite vrijednost realnog parametra x ako je poznato da je A singularna. Za dobiveni parametar odredite svojstvene vrijednosti matrice A, njihove algebarske i geometrijske kratnosti i pripadne svojstvene potprostore svih svojstvenih vrijednosti. Može li se A dijagonalizirati?

Zadatak 4. Neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operator zrcaljenja s obzirom na ravninu razapetu vektorima $\vec{a}_1 = \vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{a}_2 = \vec{j} + \vec{k}$. Odredite matrični prikaz ovog operatora u paru kanonskih baza. Nađite po jednu bazu za sliku i jezgru operatora, te odredite rang i defekt.