Unitarni prostori.

radni nerecenzirani materijal za predavanja

Ortogonalnost

Definicija 3.1. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Skalarni produkt na V je preslikavanje

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$$

koje ima sljedeća svojstva:

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in V;$

(2) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

(3) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \quad \forall x_1, x_2, y \in V;$

(4) $\langle ax, y \rangle = a\langle x, y \rangle, \quad \forall a \in \mathbb{F}, \forall x, y \in V;$

(5) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad \forall x, y \in V.$

Napomena 3.2.

(a) Očito, svojstva (3) i (4) iz definicije skalarnog produkta povlače

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle &= \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle, \\ &\qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}, \forall x_1, x_2, y \in V. \end{aligned}$$

Indukcijom se sada lako dokazuje da vrijedi i

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x_i, y \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_i \in \mathbb{F}, \forall x_i, y \in V.$$

Kaže se zato da je skalarno množenje linearno u prvom argumentu.

(b) Svojstva (3) i (4), a također i prethodna opaska, reflektiraju se i na drugi argument preko svojstva (5). Očito vrijedi

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle, \quad \forall x, y_1, y_2 \in V,$$

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in V$$

i

$$\left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \langle x, y_i \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_i \in \mathbb{F}, \forall x, y_i \in V.$$

Kako skalari s drugog argumenta izlaze kompleksno konjugirani, kaže se da je skalarno množenje antilinearno u drugom argumentu. Naravno, ako je prostor V realan, skalarni produkt je linearan u obje varijable.

(c) $\langle x, 0\rangle = \langle x, y-y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0, \forall x \in V$. Jasno je da vrijedi i $\langle 0, y\rangle = 0, \forall y \in V$.

(d) Uočimo da i u kompleksnom slučaju, premda su vrijednosti skalarnog produkta općenito kompleksni brojevi, uvjet (1) iz definicije zahtijeva da produkt $\langle x, x\rangle$ bude realan, čak ne-negativan, za sve vektore x.

Definicija 3.3. Vektorski prostor na kojem je definiran skalarni produkt zove se unitaran prostor.

Primjer 3.4.

1. $X_0(p)$, $X_0(M)$ i $X_0(E)$ su unitarni prostori.

2. U $\mathbb{R}^n$ skalarni produkt je definiran s
$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
Uz ovako zadan skalarni produkt $\mathbb{R}^n$ je unitaran prostor.

3. U $\mathbb{C}^n$ skalarni produkt je definiran s
$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

4. U $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ skalarni produkt je definiran s
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^* A),$$
pri čemu je matrica B^* hermitski adjungirana matrici B. Za realne matrice hermitsko adjungiranje svodi na transponiranje.

5. U $\mathbb{R}^2$ definirajmo
$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = 3x_1 y_1 + 4x_2 y_2.$$
Lako je pokazati da je ovo preslikavanje skalarni produkt. Ovdje nije bitno $n = 2$, i nisu bitni faktori 3 i 4. Jasno je da analogne primjere imamo i u $\mathbb{R}^n$ s bilo kojim izborom strogo pozitivnih koeficijenata. Primjer pokazuje da nije sasvim korektno govoriti o unitarnom prostoru V jer na istom prostoru može biti (i uvijek ima!) više različitih skalarnih produkata. Ipak, mi ćemo govoriti o unitarnim prostorima $\mathbb{F}^n$ i $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, a kad god tako činimo podrazumijevamo standardne skalarne produkte na tim prostorima opisane u prethodnim primjerima 2, 3 i 4.

6. U prostoru realnih polinoma čiji stupanj je manji ili jednak n, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, skalarni produkt je definiran s
$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t.$$
I ovdje postoje druge mogućnosti; na primjer,
$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t$$
je još jedan skalarni produkt na istom prostoru.

7. U $C([0,1])$ jedan skalarni produkt je definiran formulom
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$
Ovaj nam primjer neće biti važan jer promatramo samo konačnodimenzionalne prostore, no istaknimo da je skalarni produkt jednako važan koncept i u proučavanju beskonačnodimenzionalnih prostora.

Teorem 3.5. (Cauchy-Schwarzova nejednakost) Neka je V unitaran prostor. Tada je
$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$
za sve x, y iz V. Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori x i y linearno zavisni.

Definicija 3.6. Neka je V unitaran prostor. Norma na V je funkcija
$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$
definirana s
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Propozicija 3.7. Norma na unitarnom prostoru V ima sljedeća svojstva:

(1) $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in V$;

(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(3) $\|ax\| = |a|\|x\|, \quad \forall a \in \mathbb{F}, \forall x \in V$;

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V.$

Napomena 3.8.

(a) Norma na svakom unitarnom prostoru V zadovoljava tzv. relaciju paralelograma:
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in V.$$
Ova jednakost je izravna posljedica definicije norme i skalarnog produkta.

(b) Svaka funkcija na vektorskom prostoru sa svojstvima iz propozicije 3.7. naziva se norma. Kad god imamo normu $\|\cdot\|$ na vektorskom prostoru V, smisleno je definirati i preslikavanje

$$d : V \times V \to \mathbb{R}$$

formulom

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Sad se vidi da je prirodno ovakvo preslikavanje shvaćati kao razdaljinsku funkciju ili metriku na V, tj. kao funkciju koja mjeri udaljenost elemenata x i y. Zaista, $d(x,y)$ ima sva razumna svojstva koja intuitivno očekujemo. Vrijedi, naime,

(1) $d(x,y) \geq 0, \quad \forall x,y \in V$;

(2) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

(3) $d(x,y) = d(y,x), \quad \forall x,y \in V$

(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \quad \forall x,y,z \in V.$

Napomena 3.9. Korisno je zabilježiti i sljedeću direktnu posljedicu definicije skalarnog produkta. Vidjeli smo kako se pomoću skalarnog produkta u proizvoljnom unitarnom prostoru V definira norma. Zanimljivo je da se skalarni produkt u V može rekonstruirati iz tako uvedene norme. Naime, za sve x,y iz V vrijedi sljedeća polarizacijska formula:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\langle x+y, x+y\rangle - \frac{1}{4}\langle x-y, x-y\rangle$$

ako je prostor realan, odnosno

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \frac{1}{4}\langle x+y, x+y\rangle - \frac{1}{4}\langle x-y, x-y\rangle \\ &\quad + \frac{\mathrm{i}}{4}\langle x+\mathrm{i}y, x+\mathrm{i}y\rangle - \frac{\mathrm{i}}{4}\langle x-\mathrm{i}y, x-\mathrm{i}y\rangle\end{aligned}$$

ako je prostor kompleksan.

Definicija 3.10. Neka je V unitaran prostor. Kaže se da je vektor $x \in V$ normiran ako je $\|x\| = 1$.

Definicija 3.11. Neka je V unitaran prostor. Kaže se da su vektori x, y iz V međusobno okomiti ili ortogonalni (oznaka: $x \perp y$) ako je

$$\langle x,y\rangle = 0.$$

Konačan skup vektora $\{e_1,\ldots,e_k\}$ je ortogonalan ako je $e_i \perp e_j, \forall i \neq j$. Skup $\{e_1,\ldots,e_k\}$ je ortonormiran ako je ortogonalan i ako je $\|e_i\| = 1, \forall i = 1,\ldots,k$.

- činjenicu da je skup $\{e_1, \dots, e_k\}$ ortonormiran možemo elegantno zapisati kao

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

  pri čemu je δ_{ij} Kroneckerov simbol.

Propozicija 3.12. Neka je V unitaran prostor. Svaki ortogonalan skup $\{e_1, \dots, e_k\} \subseteq V$, $k \in \mathbb{N}$, čiji su svi članovi netrivijalni vektori je linearno nezavisan. Posebno, svaki ortonormiran skup je linearno nezavisan.

Definicija 3.13. Ortonormiran skup $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ u unitarnom prostoru V je ortonormirana baza ako je taj skup ujedno i baza za V.

Napomena 3.14. Neka je skup $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza unitarnog prostora V. Svaki vektor iz V dopušta jedinstven prikaz u obliku

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

No sada, za razliku od obične baze u nekom običnom vektorskom prostoru, ortonormirana baza “dopuĹˇta” da koeficijente vektora x jednostavno i prirodno odredimo: skalarnim množenjem prethodne jednakosti s e_j odmah dobivamo

$$\alpha_j = \langle x, e_j \rangle$$

za sve $j = 1, 2, \dots, n$. Vrijedi, dakle,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Osim toga, skalarni produkt dvaju vektora možemo jednostavno izraziti pomoću njihovih komponenti u bilo kojoj ortonormirnoj bazi. Zaista, ako je $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza za V, onda za $x, y \in V$ imamo

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j \rangle e_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle e_j, y \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle.
\end{aligned}$$

Teorem 3.15. (Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije) Neka je dan linearno nezavisan skup $\{x_1, \dots, x_k\}, k \in \mathbb{N}$, u unitarnom prostoru V. Tada postoji ortonormiran skup $\{e_1, \dots, e_k\}$ u V takav da je

$$[\{e_1, \dots, e_j\}] = [\{x_1, \dots, x_j\}], \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

Napomena 3.16. Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije je zapravo ime dokaza, odnosno konstrukcije, a ne tvrdnje teorema.

Korolar 3.17. Svaki konačnodimenzionalan unitaran prostor ima ortonormiranu bazu.

Primjer 3.18. Ortonormirajmo nezavisan skup $\{x_1, x_2, x_3\}$ u $\mathbb{R}^3$ pri čemu je

$$x_1 = (2, 1, 2), \quad x_2 = (3, 3, 0), \quad x_3 = (9, 3, 3).$$

Definicija 3.19. Neka je V unitaran prostor i M potprostor od V. Ortogonalni komplement potprostora M je

$$M^\perp = \{x \in V \ : \ \langle x, v\rangle = 0, \ \forall v \in M\}.$$

Propozicija 3.20. Neka je V unitaran prostor i M potprostor od V. Ortogonalni komplement potprostora M je također potprostor od V.

Teorem 3.21. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i M potprostor od V. Tada je $M^\perp$ (jedan) direktan komplement od M u V.

Napomena 3.22.

(a) Obično pišemo

$$V = M \oplus M^\perp$$

Kako je $M^\perp$ jednoznačno definiran (za razliku od običnoga direktnog komplementa), ovdje je smislena oznaka

$$M^\perp = V \ominus M.$$

(b) Vrijedi

$$(M^\perp)^\perp = M$$

Također vrijedi

$$(L + M)^\perp = L^\perp \cap M^\perp$$

i

$$(L \cap M)^\perp = L^\perp + M^\perp$$

Napomena 3.23. Neka je $P \in L(V)$ projektor na M u smjeru potprostora $M^\perp$. Ako je $\{e_1, \dots, e_k\}$ ortonormirana baza potprostora M, onda je

$$Px = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i\rangle e_i, \quad \forall x \in V$$

Teorem 3.24. Neka je $A \in M_{nk}(\mathbb{R})$ te neka vrijedi $\mathrm{r}(A) = r$. Postoje matrice $Q \in M_{nr}(\mathbb{R})$ čiji su stupci ortonormirani i gornjetrokutasta $R \in M_{rk}(\mathbb{R})$ takve da vrijedi

$$A = QR.$$

Pritom, stupci matrice Q čine ortonormiranu bazu za $\operatorname{Im} L_A$,

$$Q^T Q = I \in M_r(\mathbb{R}),$$

L_{QQ^T} je ortogonalni projektor na $\operatorname{Im} L_A$,

$$\operatorname{Ker} L_A = \operatorname{Ker} L_R$$

te vrijedi $\operatorname{r}(A) = \operatorname{r}(R) = r$.

Primjer 3.25. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor, $M \leq V$ i $x \in V$. Željeli bismo odrediti najbolju aproksimaciju vektora x vektorima iz potprostora M.

Operatori na unitarnim prostorima

Teorem 3.26. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i f linearan funkcional na V. Tada postoji jedinstven vektor $a \in V$ takav da je $f = f_a$, tj.

$$f(x) = \langle x, a \rangle, \quad \forall x \in V.$$

Definicija 3.27. Neka su V i W unitarni prostori takvi da je $\dim V = \dim W$. Kažemo da je $A \in L(V, W)$ unitaran operator ako vrijedi

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

Napomena 3.28.

(a) Uočimo da je za $A \in L(V, W)$ zahtjev

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V$$

ekvivalentan uvjetu

$$\|Ax\| = \|x\|, \quad \forall x \in V.$$

(b) Svaki operator sa svojstvom

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V,$$

je injektivan.

(c) Svojstvo očuvanja skalarnih produkata, kao i izometričnost smisleno je i za operatore na beskonačnodimenzionalnim prostorima.

(d) I općenito, ako i nije $\dim V = \dim W$, mogli bismo za operatore $A : V \to W$ promatrati zahtjev

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

Međutim, to ima smisla tek ako je $\dim V \leq \dim W$!

(e) Ako je $\dim V < \dim W$ operator $A \in L(V, W)$ sa svojstvom

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V,$$

se naziva izometrija.

Teorem 3.29. Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(V, W)$. Sljedeći su uvjeti međusobno ekvivalentni:

(i) A je unitaran;

(ii) za svaku ortonormiranu bazu $\{b_1, \dots, b_n\}$ od V skup $\{Ab_1, \dots, Ab_n\}$ je ortonormirana baza za W;

(iii) postoji ortonormirana baza $\{e_1, \dots, e_n\}$ od V takva da je i skup $\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ ortonormirana baza za W.

Propozicija 3.30. Neka su V i W unitarni prostori i $A \in L(V, W)$ unitaran operator. Tada je

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^{-1}y \rangle, \quad \forall x \in V, \ \forall y \in W.$$

Propozicija 3.31. Neka je V unitaran prostor i $A \in L(V)$ unitaran operator s nepraznim spektrom. Sve svojstvene vrijednosti operatora A imaju apsolutnu vrijednost jednaku 1. Svojstveni potprostori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno su okomiti.

Primjer 3.32. Opišimo unitarne operatore na dvodimenzionalnom realnom unitarnom prostoru $X_0(M)$. Pokazat ćemo da je operator rotacije R_φ zapravo tipičan primjer unitarnog operatora na ovom prostoru.

Teorem 3.33. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Postoji jedinstven operator $A^* \in L(V)$ takav da je

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$$

za sve vektore x, y iz V.

Definicija 3.34. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Operator $A^* \in L(V)$ sa svojstvom

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \quad \forall x, y \in V,$$

zove se hermitski adjungiran operator operatoru A.

Propozicija 3.35. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor, te neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za V. Tada za svaki operator $A \in L(V)$ vrijedi

$$[A^*]_e^e = ([A]_e^e)^*.$$

Korolar 3.36. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor. Preslikavanje $A \mapsto A^*$ koje svakom operatoru $A \in L(V)$ pridružuje hermitski adjungiran operator $A^* \in L(V)$ ima sljedeća svojstva:

(1) $(A + B)^* = A^* + B^*, \quad \forall A, B \in L(V)$;

(2) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F},\ \forall A \in L(V)$;

(3) $(AB)^* = B^* A^*, \quad \forall A, B \in L(V)$;

(4) $(A^*)^* = A, \quad \forall A \in L(V)$.

Propozicija 3.37. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Tada je

$$V = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^* \quad \text{i} \quad V = \operatorname{Ker} A^* \oplus \operatorname{Im} A.$$

Nadalje, $\mathrm{r}\,(A^*) = \mathrm{r}\,(A)$.

Napomena 3.38.

(a) Primijetimo da iz posljednje tvrdnje prethodne propozicije, uz pomoć propozicije 3.35. opet možemo zaključiti da je u svakoj matrici (ovdje kvadratnoj) jednak broj linearno nezavisnih redaka i stupaca.

(b) Tvrdnja teorema 3.33., tj. egzistencija hermitski adjungiranog operatora može se dokazati i za operatore $A : V \to W$ između dva različita unitarna prostora nad istim poljem. U tom je slučaju $A^* \in L(W, V)$. I u ovoj situaciji vrijede formule analogne onima iz propozicija 6.2.11 i 6.2.13.

Propozicija 3.39. Neka je $A \in L(V)$ unitaran operator i neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza prostora V. Tada za matrični zapis $[A]_e^e$ operatora A vrijedi

$$[A]_e^e ([A]_e^e)^* = ([A]_e^e)^* [A]_e^e = I.$$

Definicija 3.40. Kaže se da je kompleksna kvadratna matrica A unitarna ako vrijedi

$$AA^* = A^* A = I.$$

Realna kvadratna matrica A je ortogonalna ako vrijedi

$$AA^T = A^T A = I.$$

Korolar 3.41. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ unitaran operator. Matrica $[A]_e^e$ operatora A u svakoj ortonormiranoj bazi e prostora V je unitarna ako je prostor kompleksan, odnosno ortogonalna ako je prostor realan.

Korolar 3.42. Produkt dviju unitarnih (ortogonalnih) matrica je također unitarna (ortogonalna) matrica.

Napomena 3.43. Primijetimo da je matrica prijelaza

$$[S]_e^e = [I]_{e'}^e,$$

iz jedne ortonormirane baze e u drugu ortonormiranu bazu e' uvijek unitarna, odnosno ortogonalna.

Definicija 3.44. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Kažemo da je operator A hermitski ako vrijedi

$$A^* = A.$$

Primjer 3.45. Neka je V unitaran prostor, neka je M pravi potprostor od V. Pokažimo da je ortogonalni projektor na M hermitski operator.

Korolar 3.46. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i neka je $A \in L(V)$ hermitski operator. Tada je

$$V = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A.$$

Definicija 3.47. Kaže se da je kvadratna matrica $A = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_n$ hermitska ako vrijedi $A^* = A$, tj.

$$\alpha_{ij} = \overline{\alpha}_{ji}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Propozicija 3.48. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i neka je $A \in L(V)$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:

(i) A je hermitski operator;

(ii) za svaku ortonormiranu bazu b u V matrica $[A]_b^b$ je hermitska;

(iii) postoji ortonormirana baza e u V takva da je matrica $[A]_e^e$ hermitska.

Propozicija 3.49. Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ hermitski operator. Sve svojstvene vrijednosti operatora A su realni brojevi.

Propozicija 3.50. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ hermitski operator. Svojstveni potprostori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima operatora A međusobno su okomiti.

Teorem 3.51. Neka je V konačnodimenzionalan realan unitaran prostor, neka je $A \in L(V)$ hermitski operator. Tada je spektar operatora A neprazan.

Korolar 3.52. Realna simetrična matrica ima svojstvenu vrijednost.

Teorem 3.53. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor, neka je $A \in L(V)$ hermitski operator. Postoji ortonormirana baza e prostora V u kojoj je matrični zapis $[A]_e^e$ operatora A dijagonalna matrica.

Korolar 3.54. Svaka simetrična matrica je ortogonalno slična dijagonalnoj matrici.