Odjel za fiziku, Sveučilište u Osijeku 18. travnja 2019.

Prvi kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. Neka je zadan vektorski prostor $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3 i polinomi $p(t) = 2t^3 + t^2 + t + 3$ i $q(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 1$.

(a) [10 bod] Odredite realne parametre a i b tako da polinom $r(t) = (a+b)t^3 + at^2 - 2t + b$ bude linearna kombinacija polinoma p i q.

(b) [10 bod] Nadopunite skup $\{p, q\}$ do baze prostora $\mathcal{P}_3$.

Zadatak 2. [25 bod] Neka je V skup uređenih parova realnih brojeva $\mathbb{R}^2$. Neka su definirane operacije zbrajanja i množenja skalarom

$$(x_1, y_1) \boxplus (x_2, y_2) = (x_1 x_2, \frac{y_1 + y_2}{2}), \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$$

i

$$\alpha \boxdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in V.$$

Provjerite je li ovako definirana operacija zbrajanja asocijativna, te postoji li neutralni element za zbrajanje. Vrijedi li kvaziasocijativnost i distributivnost množenja prema zbrajanju skalara?

Zadatak 3. [30 bod] U prostoru $\mathcal{M}_2$ dan je potprostor

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 \ : \ a + b - c + d = 0,\ 3a - b - 2c = 0,\ 2b + c = 0 \right\}.$$

Odredite mu bazu i dimenziju, te odredite neki direktni komplement M potprostora L. Matricu $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ prikažite u obliku $C = A + B$, $A \in L$, $B \in M$.

Zadatak 4. [25 bod] U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ dani su potprostori

$$R = [\{(3, 7, 1), (0, 1, -2)\}] =: [\{a_1, a_2\}]$$

i

$$Q = [\{(3, 1, -6), (1, -1, 2), (4, -1, -1)\}] =: [\{b_1, b_2, b_3\}].$$

Odredite baze i dimenzije potprostora $R + Q$ i $R \cap Q$.