Konačnodimenzionalni vektorski prostori.

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Pojam vektorskog prostora

Definicija 1.1. Neka je $\mathbb{F}$ neprazan skup na kojem su zadane binarne operacije zbrajanja $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ i množenja $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. Uređenu trojku $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ zovemo poljem ako vrijedi:

(1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$;

(2) postoji $0 \in \mathbb{F}$ sa svojstvom $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$;

(3) za svaki $\alpha \in \mathbb{F}$ postoji $-\alpha \in \mathbb{F}$ tako da je $\alpha + (-\alpha) = -\alpha + \alpha = 0$;

(4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$;

(5) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$;

(6) postoji $1 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ sa svojstvom $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$;

(7) za svaki $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$ postoji $\alpha^{-1} \in \mathbb{F}$ tako da je $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$;

(8) $\alpha\beta = \beta\alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$;

(9) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$.

Definicija 1.2. Neka je V neprazan skup na kojem su zadane binarna operacija zbrajanja $+ : V \times V \to V$ i operacija množenja skalarima iz polja $\mathbb{F}$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$. Kažemo da je uređena trojka $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ ako vrijedi:

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c, \quad \forall a, b, c \in V$;

(2) postoji $0 \in V$ sa svojstvom $a + 0 = 0 + a = a, \quad \forall a \in V$;

(3) za svaki $a \in V$ postoji $-a \in V$ takav da je $a + (-a) = -a + a = 0$;

(4) $a + b = b + a, \quad \forall a, b \in V$;

(5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \ \forall a \in V$;

(6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \ \forall a \in V$;

(7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \ \forall a, b \in V$;

(8) $1 \cdot a = a, \quad \forall a \in V$.

Napomena 1.3.

(a) operacije na vektorskom prostoru su preslikavanja

(b) priroda elemenata skupa V je irelevantna. Elementi vektorskog prostora nazivaju se vektori.

(c) $\mathbb{F}$ može biti bilo koje polje, no najvažniji su slučajevi vektorskih prostora sagrađenih nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva. Vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$ nazivaju se realni vektorski prostori; za one nad poljem $\mathbb{C}$ kažemo da su kompleksni. Elemente polja zovemo skalarima.

(d) većina tvrdnji bit će iskazana simultano za oba slučaja i tada će u iskazima stajati simbol $\mathbb{F}$

(e) formalno se govori o uređenoj trojci $(V, +, \cdot)$ nad poljem $\mathbb{F}$, no kada je iz konteksta jasno o kojim je operacijama i o kojem polju riječ, pisat ćemo jednostavno V

Napomena 1.4.

(a) svojstvo (2) u definiciji govori o postojanju neutralnog elementa za zbrajanje

(b) uvjet (3) nalaže postojanje suprotnog elementa

(c) svojstvo (5) zovemo kvaziasocijativnost

(d) svojstva (6) i (7) zovu se distributivnost množenja prema zbrajanju skalara, odnosno vektora

(e) posljednji zahtjev sprječava degenerirane strukture

(f) uvjeti iz definicije su međusobno nezavisni

Propozicija 1.5. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada

(1) Za $\alpha \in \mathbb{F}$ i $a \in V$ vrijedi $\alpha a = 0$ ako i samo ako je $\alpha = 0$ ili $a = 0$;

(2) $(-\alpha)a = \alpha(-a) = -(\alpha a), \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall a \in V$;

(3) $\alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall a, b \in V$;

(4) $(\alpha - \beta)a = \alpha a - \beta a, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \quad \forall a \in V$.

Baza i dimenzija

Definicija 1.6. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Izraz oblika

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k,$$

pri čemu su $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ i $k \in \mathbb{N}$, naziva se linearna kombinacija vektora $a_1, a_2, \ldots, a_k$ s koeficijentima $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$$

Definicija 1.7. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

konačan skup vektora iz V. Kažemo da je skup S linearno nezavisan ako vrijedi

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

U suprotnom kažemo da je skup S linearno zavisan.

Napomena 1.8.

(a) za svaki konačnan skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ vektora iz V linearna kombinacija će očito biti 0 ako su svi koeficijenti nula. Ukoliko je to i jednini način kako možemo dobiti nulvektor linearno kombinirajući vektore iz S, tada je skup linearno nezavisan

(b) $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ je linearno zavisan ako $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ takvi da

$$\alpha_j \neq 0 \text{ za barem jedan } j \in \{1, 2, \ldots, k\} \text{ i } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0.$$

(c) atribut "linearno" najčešće ispuštamo, pa govorimo o nezavisnim, odnosno zavisnim skupovima

(d) za svaki $a \in V$, $a \neq 0$, jednočlan skup $\{a\}$ je nezavisan

(e) svaki skup koji sadrži nulvektor je zavisan

(f) zavisnost, odnosno nezavisnost ne ovisi o poretku vektora u promatranom skupu S

(g) svaki neprazni podskup nezavisnog skupa je nezavisan

(h) svaki nadskup zavisnog skupa je zavisan

Propozicija 1.9. Skup $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $k \geq 2$, u vektorskom prostoru V je linearno zavisan ako i samo ako postoji $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ takav da je a_j linearna kombinacija preostalih elemenata skupa S.

Ako je skup $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $k \geq 2$, linearno zavisan, uređen, te ako je $a_1 \neq 0$, onda postoji $l \in \{2, \dots, k\}$ takav da je a_l linearna kombinacija svojih prethodnika u skupu S, tj. vektora $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$.

Definicija 1.10. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Linearna ljuska skupa S označava se simbolom $[S]$ i definira kao

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \ : \ \alpha_i \in \mathbb{F}, a_i \in S, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dodatno, definira se $[\emptyset] = \{0\}$.

Definicija 1.11. Neka je V vektorski prostor i $S \subseteq V$. Kaže se da je S sustav izvodnica za V (ili da S generira V) ako vrijedi $[S] = V$.

Propozicija 1.12. Neka je S sustav izvodnica za vektorski prostor V te neka u S postoji vektor x koji se može prikazati kao linearna kombinacija (nekih drugih) elemenata iz S. Tada je i $S \setminus \{x\}$ sustav izvodnica za V.

Definicija 1.13. Konačan skup $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, u vektorskom prostoru V se naziva baza za V ako je B linearno nezavisan sustav izvodnica za V.

Teorem 1.14. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te neka je $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ baza za V. Tada za svaki $v \in V$ postoje jedinstveno određeni skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takvi da vrijedi

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i.$$

Definicija 1.15. Kaže se da je vektorski prostor V konačnodimenzionalan ili konačnogeneriran ako postoji neki konačni sustav izvodnica za V.

Propozicija 1.16. Neka je $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, sustav izvodnica za vektorski prostor $V \neq \{0\}$. Tada postoji baza prostora V koja je podskup skupa S.

Napomena 1.17. Postupak koji smo primijenili u prošlom dokazu naziva se redukcija sustava izvodnica do baze.

Teorem 1.18. Svaki konačnodimenzionalni vektorski prostor $V \neq \{0\}$ ima bazu.

Lema 1.19. Neka je $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ sustav izvodnica za vektorski prostor V, te neka je $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset V$ linearno nezavisan. Tada je $k \leq n$.

Teorem 1.20. Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor. Sve baze prostora V su jednakobrojne.

Definicija 1.21. Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor. Dimenzija prostora V definira se kao broj elemenata bilo koje njegove baze. Dodatno, uzima se da je dimenzija nulprostora 0.

Propozicija 1.22. Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, linearno nezavisan skup u konačnodimenzionalnom prostoru V. Tada se A može nadopuniti do baze.

Primjer 1.23. Nadopunimo skup

$$A = \{a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, 1, -1, -1)\}$$

do baze prostora $\mathbb{R}^4$.

Napomena 1.24. Postupak proširenja nezavisnog skupa do baze prostora nikako nije jedinstven.

Korolar 1.25. Neka je V vektorski prostor, te neka je $\dim V = n < \infty$.

(a) Svaki linearno nezavisan skup u V ima n ili manje elemenata. Svaki linearno nezavisan skup u V koji ima točno n elemenata je baza za V.

(b) Svaki sustav izvodnica za V ima n ili više elemenata. Svaki sustav izvodnica za V koji ima točno n elemenata je baza za V.

Napomena 1.26. Prethodni korolar pokazuje da svaki linearno nezavisan skup u prostoru dimenzije n ima najviše n elemenata. U tom smislu je definicija linearne nezavisnosti, kako smo je naveli, sasvim zadovoljavajuća za konačnodimenzionalne prostore.

Potprostor

Definicija 1.27. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Ako je i $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ uz iste operacije iz V, kažemo da je M potprostor od V.

Kada je M potprostor od V, pisat ćemo $M \leq V$.

Propozicija 1.28. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i M neprazni podskup od V. Tada je M potprostor od V ako i samo ako vrijedi

(i) $a + b \in M, \qquad \forall a, b \in M,$

(ii) $\alpha a \in M, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall a \in M.$

Korolar 1.29. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i M neprazni podskup od V. Tada je M potprostor od V ako i samo ako vrijedi (i') $\alpha a + \beta b \in M, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \quad \forall a, b \in M.$

Napomena 1.30. Ako je $M \leq V$, onda je, po prethodnom korolaru, M zatvoren na dvočlane linearne kombinacije svojih elemenata. Jednostavnim induktivnim elementom može se pokazati da to vrijedi i za sve (naravno, konačne) linearne kombinacije vektora iz M. Eksplicitno: ako je $M \leq V$, onda za $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, $a_1, \ldots, a_n \in M$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \in M$.

Primjer 1.31. Označimo s $\mathcal{M}_n$ skup svih kvadratnih matrica reda n, G skup svih gornjetrokutastih matrica reda n, a s D skup svih donjetrokutaskih matrica reda n. Vrijedi $\mathsf{G} \leq \mathcal{M}_n$ i $\mathsf{D} \leq \mathcal{M}_n$.

Primjer 1.32. Označimo sa S skup svih simetričnih matrica reda n, a s A skup svih antisimetričnih matrica reda n. Vrijedi $\mathsf{S} \leq \mathcal{M}_n$ i $\mathsf{A} \leq \mathcal{M}_n$.

Primjer 1.33. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $S \subset V$. Tada je $[S]$ potprostor od V.

Propozicija 1.34. Neka je V vektorski prostor takav da je $\dim V = n < \infty$, te neka je M potprostor od V. Tada je $\dim M \leq n$.
Ako je M potprostor od V takav da je $\dim M = n$, onda je $M = V$.

Propozicija 1.35. Neka je V vektorski prostor te neka su L i M njegovi potprostori. Tada je i $L \cap M$ potprostor od V.

Napomena 1.36. Ako je M_i, $i \in I$, familija potprostora vektorskog prostora V (pri čemu je indeksni skup I proizvoljno velik, moguće i beskonačan), onda je i $\cap_{i \in I} M_i$ također potprostor od V.

- neka je S proizvoljni neprazni podskup vektorskog prostora V. Tada je $[S]$ presjek svih potprostora od V koji sadrže skup S (te je zato $[S]$ zapravo najmanji potprostor od V koji sadrži S).

Definicija 1.37. Neka je V vektorski prostor, te neka su L i M njegovi potprostori. Suma potprostora L i M označava se s $L + M$ i definira kao

$$L + M = [L \cup M].$$

Propozicija 1.38. Neka je V vektorski prostor, te neka su L i M njegovi potprostori. Tada je

$$L + M = \{x + y \mid x \in L, y \in M\}.$$

Definicija 1.39. Neka je V vektorski prostor, te neka su L i M njegovi potprostori. Kažemo da je suma potprostora L i M direktna i tada je označavamo s $L \dot{+} M$ ako je

$$L \cap M = \{0\}.$$

Propozicija 1.40. Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Suma $L+M$ je direktna ako i samo ako svaki vektor $v \in L+M$ dopušta jedinstven prikaz u obliku

$$v = a + b, \qquad a \in L, \quad b \in M.$$

Teorem 1.41. Neka je V konačnodimenzionalni prostor, te neka su L i M potprostori od V. Tada je

$$\dim(L+M) + \dim(L \cap M) = \dim L + \dim M.$$

Korolar 1.42. Neka potprostori L i M konačnodimenzionalnog prostora V čine direktnu sumu. Tada je

$$\dim(L \dotplus M) = \dim L + \dim M.$$

Primjer 1.43. Promotrimo potprostore G i D prostora $\mathcal{M}_n$.

Primjer 1.44. Promotrimo potprostore S i A prostora $\mathcal{M}_n$.

Definicija 1.45. Neka je V vektorski prostor, te neka je L potprostor od V. Potprostor M prostora V se naziva direktan komplement od L ako vrijedi

$$L \dotplus M = V.$$

Teorem 1.46. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i L njegov potprostor. Tada postoji direktan komplement od L u V.

Napomena 1.47. U proizvoljnom vektorskom prostoru niti jedan netrivijalni potprostor nema jedinstven direktan komplement.

- V vektorski prostor, ne nužno konačnodimenzionalan, M potprostor od V
- definiramo binarnu relaciju $\sim$ na V formulom

$$x \sim y \Longleftrightarrow y - x \in M, \quad x, y \in V$$

- za $x \in V$ s $[x]$ označavamo klasu ekvivalencije određenu vektorom x, odnosno

$$[x] = \{y \in V \ : x \sim y\}$$

- x nazivamo reprezentantom ili predstavnikom ove klase ekvivalencije. Uočimo da se ista klasa $[x]$ može predočiti i drugim predstavnicima

$$[x] = [y] \Longleftrightarrow x \sim y$$

- klase ekvivalencije za ovako uvedenu relaciju možemo i preciznije opisati: vrijedi

$$[x] = x + M, \quad \forall x \in V,$$

pri čemu $x + M$ označava skup $\{x + a \ : \ a \in M\}$

Definicija 1.48. Neka je M potprostor prostora V. Svaki skup oblika

$$x + M = \{x + a \ : \ a \in M\}, \quad x \in V,$$

naziva se linearna mnogostrukost u smjeru potprostora M. Skup svih linearnih mnogostrukosti u smjeru potprostora M označava se s V/M i naziva kvocijentni skup ili kvocijent (prostora V po potprostoru M).

Teorem 1.49. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te neka je M potprostor od V. Tada je uz operacije

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M, \quad x, y \in V$$

$$\alpha(x + M) = \alpha x + M, \quad \alpha \in \mathbb{F}, \ \ x \in V,$$

kvocijentni skup V/M vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

Teorem 1.50. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i M njegov potprostor. Tada je i prostor V/M konačnodimenzionalan i vrijedi

$$\dim V/M = \dim V - \dim M.$$