`Radni nerecenzirani materijal za predavanja, autor prof. dr. sc. Rudolf Scitovski`

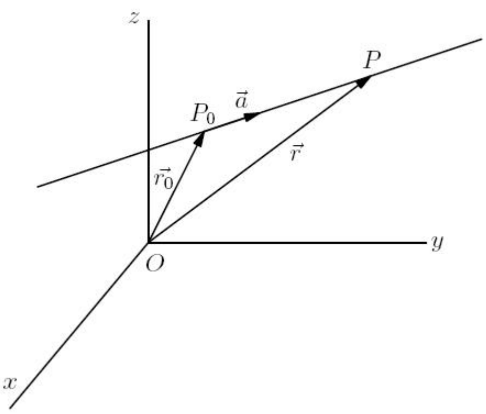
1 Pravac i ravnina u prostoru

1.1 Pravac u prostoru

Neka je $(O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ pravokutni koordinatni sustav u prostoru. Pravac p u prostoru može biti zadan

(i) točkom $P_0 \in E$ i vektorom $\vec{a} \in X_0(E)$ ili

(ii) s dvije točke $P_0, P_1 \in E$.



Slika 1: Zadavanje pravca u prostoru s točkom $P_0 \in E$ i vektorom $\vec{a} \in X_0(E)$

(i) Neka je zadana točka $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ s radijvektorom $\vec{r}_0$ i vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \in X_0(E)$. Pravac p definirat ćemo kao skup svih točaka $P \in E$, čiji radij vektor $\vec{r}$ možemo zapisati kao

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Prikaz (1) obično zovemo **parametarski oblik jednadžbe pravca** p. U koordinatnom obliku to je

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 \\ y &= y_0 + \lambda a_2 \\ z &= z_0 + \lambda a_3 \end{aligned} \tag{2}$$

Eliminacijom parametra λ dobivamo **kanonski oblik jednadžbe pravca** p

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}, \qquad a_1, a_2, a_3 \neq 0. \tag{3}$$

Primjer 1. *Ako je $a_3 = 0$, onda iz (2) slijedi*

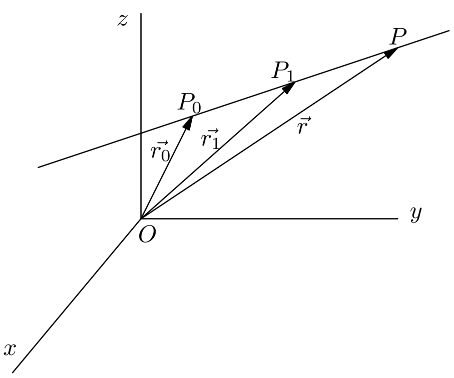
$$z = z_0.$$

To znači da sve točke pravca p imaju istu aplikatu z_0, odnosno da je pravac paralelan s (x, y)-ravninom.

Primjer 2. *Ako je $a_2 = a_3 = 0$, onda iz (2) slijedi*

$$y = y_0, \qquad z = z_0.$$

To znači da sve točke pravca p imaju istu ordinatu y_0 i aplikatu z_0, odnosno da je pravac paralelan s osi x.



Slika 2: Zadavanje pravca u prostoru s dvije točke $P_0, P_1 \in E$.

(ii) Neka su $P_0 = (x_0, y_0, z_0), P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in E$ dvije različite točke. Uz oznaku $\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1}$ ponovo smo u situaciji opisanoj pod (i). Ako s $\vec{r}_0$ označimo radij-vektor točke P_0, a s $\vec{r}_1$ radij-vektor točke P_1, tada je $\vec{a} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$, pa **parametarski oblik jednadžbe pravca** p u ovom slučaju glasi

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda(\vec{r}_1 - \vec{r}_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

odnosno

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y &= y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z &= z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{aligned} \tag{5}$$

Eliminacijom parametra λ dobivamo **kanonski oblik jednadžbe pravca** p, koji prolazi točkama $P_0, P_1 \in E$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}, \qquad x_1 \neq x_0, \quad y_1 \neq y_0, \quad z_1 \neq z_0. \tag{6}$$

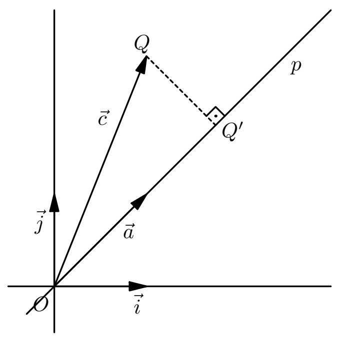
Zadatak 1. *Kako glasi jednadžba pravca određenog s dvije točke $P_0, P_1 \in E$, koje*
a) leže u ravnini paralelnoj nekoj od koordinatnih ravnina?

a) leže na pravcu paralelnom nekoj od koordinatnih osi?

Primjer 3. *Pravac p prolazi ishodištem O pravokutnog koordinatnog sustava $\big(O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\big)$ i zadan je vektorom $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$. Treba izračunati udaljenost točke $Q = (1, 3, 0)$ do pravca p.*

Označimo s $\vec{u}$ jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{a}$ i $\vec{c} := \overrightarrow{OQ}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}, \qquad \vec{c} = \overrightarrow{OQ} = \vec{i} + 3\vec{j}.$$



Slika 3: Udaljenost točke do pravca kroz ishodište

Neka je Q' ortogonalna projekcija točke Q na pravac p (određen vektorom $\vec{a}$, tj. jediničnim vektorom $\vec{u}$). Prema (1.17) udaljenost $d(Q', Q)$ točke Q do točke Q' određena je normom vektora

$$\overrightarrow{Q'Q} = \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u}.$$

Kako je

$$\vec{c} \cdot \vec{u} = \frac{4}{\sqrt{2}}, \qquad (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j},$$

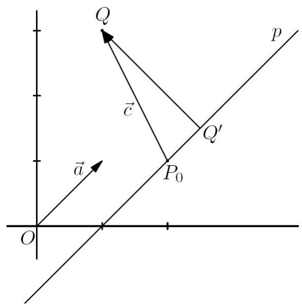
imamo

$$\overrightarrow{Q'Q} = -\vec{i} + \vec{j}, \qquad d(Q', Q) = \|\overrightarrow{Q'Q}\| = \sqrt{2}.$$

Primjer 4. *Pravac p prolazi točkom $P_0 = (2, 1, 0) \in E$ i zadan je vektorom $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$. Treba izračunati udaljenost točke $Q = (1, 3, 0)$ do pravca p.*

Označimo s $\vec{u}$ jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{a}$, a s $\vec{c} := \overrightarrow{P_0Q}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}, \qquad \vec{c} = \overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP_0} = -\vec{i} + 2\vec{j}.$$



Slika 4: Udaljenost točke do pravca

Neka je Q' ortogonalna projekcija točke Q na pravac p (određen vektorom $\vec{a}$, tj. jediničnim vektorom $\vec{u}$). Prema (1.17) udaljenost $d(Q', Q)$ točke Q do točke Q' određena je normom vektora

$$\overrightarrow{Q'Q} = \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u}.$$

Kako je

$$\vec{c} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j},$$

imamo

$$\overrightarrow{Q'Q} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}, \qquad d(Q', Q) = \|\overrightarrow{Q'Q}\| = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Isti problem možemo riješiti primjenom formule (5.9):

$$\vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} + \vec{u} \times (\vec{c} \times \vec{u})$$

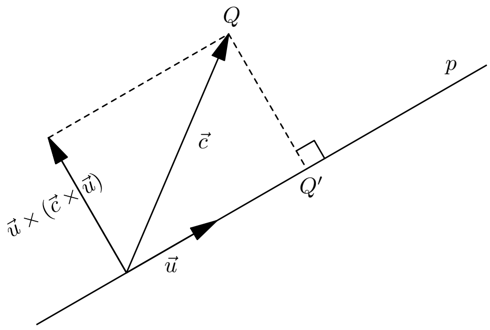
Pri tome

- $(\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u}$ je projekcija vektora $\vec{c}$ na pravac p (vidi također (1.17));
- vektor $\vec{u} \times (\vec{c} \times \vec{u})$ je okomit na $\vec{u}$ i jednak vektoru $\overrightarrow{Q'Q}$, a njegova duljina predstavlja udaljenost točke Q do pravca p. Kako je $\vec{u} \perp (\vec{c} \times \vec{u})$, imamo

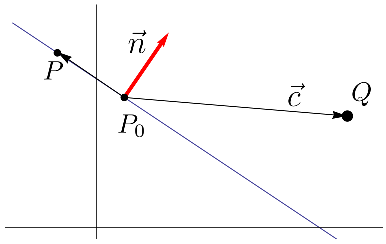
$$d(Q, p) = \|\vec{u} \times (\vec{c} \times \vec{u})\| = \|\vec{c} \times \vec{u}\|.$$

Zadatak 2. *Na osnovi ovog pristupa izradite* Primjer 3 *i* Primjer 4.

Primjer 5. *Neka je $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini u kome je pomoću toĂŤke $P_0 = (x_0, y_0)$ i normale $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ zadan pravac p. Napisat ćemo jednadžbu tog pravca i izvesti formulu za udaljenost točke $Q = (x_Q, y_Q)$ do pravca p.*



Slika 5: Udaljenost točke do pravca primjenom formule (5.9



Slika 6: Udaljenost točke do pravca

Neka je $P = (x, y)$ proizvoljna točka na pravcu p. Tada su vektori $\overrightarrow{P_0P}$ i $\vec{n}$ okomiti

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0,$$

iz čega dobivamo jednadžbu pravca p

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

odnosno

$$ax + by + c = 0, \qquad c = -ax_0 - by_0.$$

U cilju određivanja udaljenosti točke Q do pravca p odredit ćemo projekciju vektora $\overrightarrow{P_0Q}$ na normalu određenu s jediničnim vektorom

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{a\vec{i} + b\vec{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

Tako dobivamo

$$d(Q, p) = \|(\vec{c} \cdot \vec{n}_0)\vec{n}_0\| = |(\vec{c} \cdot \vec{n}_0)| = \frac{|a(x_Q - x_0) + b(y_Q - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

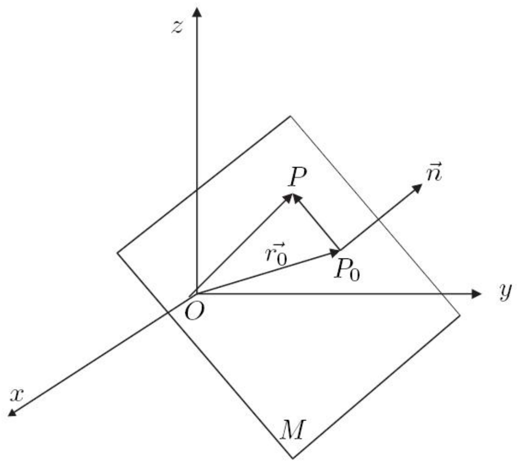
Primjerice za pravac $3x + 4y - 1 = 0$ i točku $Q = (1, 1)$ dobivamo $d(Q, p) = \frac{6}{5}$.
Specijalno, ako je pravac p zadan u eksplicitnom obliku $y = kx + l$, dobivamo

$$d(Q, p) = \frac{|kx_Q + l - y_Q|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

* * * * *

1.2 Ravnina u prostoru

Prijeđimo sada na određivanje opće jednadžbe ravnine u prostoru i udaljenosti neke točke Q do ravnine. Neka je $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ točka koja leži u ravnini M, a $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \neq \vec{0}$ normala na nju.



Slika 7: Zadavanje ravnine u prostoru

Tada je za svaku točku $P = (x, y, z) \in M$ vektor $\overrightarrow{P_0P}$ okomit na normalu $\vec{n}$, tj. vrijedi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

odnosno

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad \text{gdje je} \quad D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0. \tag{7}$$

Jednadžbu (7) zovemo **opća jednadžba ravnine** zadane točkom P_0 i normalom $\vec{n}$.

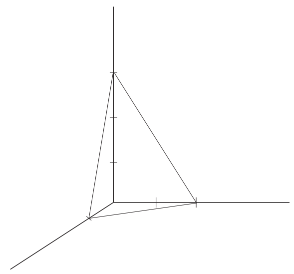
Ako je $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$, onda jednadžba (7) prelazi u **segmentni oblik jednadžbe ravnine**

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1, \qquad \text{gdje je} \quad p = -\frac{D}{A}, \quad q = -\frac{D}{B}, \quad r = -\frac{D}{C}. \tag{8}$$

Primjer 6. *Zadana je opća jednadžba ravnine* $6x + 3y + 2z - 6 = 0$*. Njezin segmentni oblik je* $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$*, a odgovarajuća ravnina prikazana je na Slici 8.*

1.3 Projekcija vektora na ravninu i udaljenost točke do ravnine

Neka je $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ točka u ravnini M, a $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ normala na nju. Neka je nadalje $\vec{n}_0$ jedinični vektor u smjeru normale, a $Q \in E$ točka izvan ravnine M. Označimo $\vec{c} := \overrightarrow{P_0Q} \in X_0(E)$.

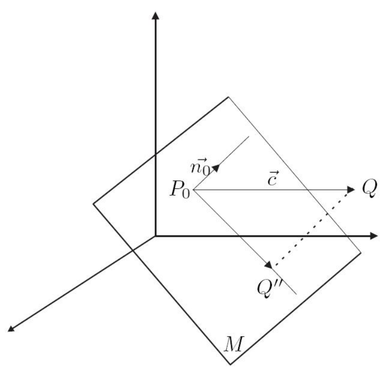


Slika 8: Ravnina $6x + 3y + 2z - 6 = 0$

Prema (5.9) vektor $\vec{c}$ rastavit ćemo na dva vektora: jedan u smjeru normale $\vec{n}$, a drugi okomito na nju (leži u ravnini M!):

$$\vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{n}_0)\vec{n}_0 + \vec{n}_0 \times (\vec{c} \times \vec{n}_0), \qquad \vec{n}_0 = \frac{A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{9}$$

pri čemu je



Slika 9: Udaljenost točke Q do ravnine M

- $(\vec{c} \cdot \vec{n}_0)\vec{n}_0$ projekcija vektora $\vec{c}$ na normalu određenu vektorom $\vec{n}_0$;
- $\|(\vec{c} \cdot \vec{n}_0)\vec{n}_0\| = |(\vec{c} \cdot \vec{n}_0)|$ je udaljenost točke Q do ravnine M;
- $\vec{n}_0 \times (\vec{c} \times \vec{n}_0)$ projekcija vektora $\vec{c}$ na ravninu M;
- $\|\vec{n}_0 \times (\vec{c} \times \vec{n}_0)\| = \|\vec{c} \times \vec{n}_0\|$ je udaljenost točke Q do normale ($\vec{n}_0 \perp (\vec{c} \times \vec{n}_0)$).

Neka je $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ i $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Tada je $\vec{c} = \overrightarrow{P_0Q} = (x_Q - x_0)\vec{i} + (y_Q - y_0)\vec{j} + (z_Q - z_0)\vec{k}$, a udaljenost točke Q do ravnine M zadana je s

$$d(Q, M) = |(\vec{c} \cdot \vec{n}_0)| = \frac{|A(x_Q - x_0) + B(y_Q - y_0) + C(z_Q - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{10}$$

gdje je $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

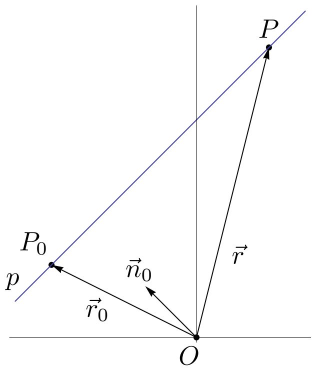
Primjer 7. *Izračunajmo udaljenost ishodišta $O = (0, 0, 0)$ pravokutnog koordinatnog sustava do ravnine zadane jednadžbom $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.*

Imamo
$$d(O, M) = \frac{|6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{6}{7}.$$

2 Hesseov normalni oblik jednadžbe pravca i ravnine

2.1 Hesseov normalni oblik jednadžbe pravca u ravnini

Neka je $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Pravac p u ravnini određen je točkom P_0 i jediničnim vektorom normale $\vec{n}_0$ na pravac p *koji ima smjer od ishodišta O prema pravcu p*, a s pozitivnim smjerom osi x zatvara kut α (vidi (Slika 10)
$$\vec{n}_0 = \cos\alpha \vec{i} + \sin\alpha \vec{j}.$$



Slika 10: Hesseov normalni oblik jednadžbe pravca u ravnini

Označimo s $\vec{r}_0$ radij vektor točke P_0. Neka je nadalje $P = (x, y)$ proizvoljna točka na pravcu, a $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ njezin radij vektor. Vektor $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0$ okomit je na normalu $\vec{n}_0$, pa vrijedi
$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n}_0 = 0, \tag{11}$$
odnosno
$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - \vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0 = 0.$$
Pri tome je
$$\delta := \vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0 = (r_0)_{n_0} > 0$$
udaljenost ishodišta O do pravca p. Tako dobivamo **Hesseov normalni oblik jednadžbe pravca**
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta = 0. \tag{12}$$

Obratno, ako je zadan pravac p u ravnini

$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \tag{13}$$

onda na jedinstven način možemo izabrati vektor $\vec{n}_0$ i točku $T_0 \in p$ s radijvektorom $\vec{r}_0$ tako da je s

$$\delta := \vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0 > 0,$$

određena udaljenost pravca p do ishodišta O.

Pretpostavimo da je $c < 0$ (ako nije, jednadžbu (13) pomnožimo s (-1)) i jednadžbu (13) podijelimo s $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dobivamo

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \qquad a_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad b_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad c_1 = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 0, \tag{14}$$

pri čemu je $a_1^2 + b_1^2 = 1$. Zato postoji $\alpha \in [0, 2\pi]$ i $\delta > 0$, tako da bude

$$\tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha, \qquad \tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha, \qquad \tfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \delta > 0,$$

a jednadžbu (13), možemo zapisati u Hesseovom normalnom obliku (12).

Zadatak 3. *Pravac p zadan je u Hesseovom normalnom obliku točkom P_0 i normalom $\vec{n}_0$, koja s vektorom $\vec{i}$ (pozitivnim smjerom osi x) zatvara kut α. Ustanovite odnos kuta α i kuta ϑ što ga pravac p zatvara s pozitivnim smjerom osi x.*

2.1.1 Udaljenost točke do pravca

Jednadžba pravca p u Hesseovom normalnom obliku zadana je točkom P_0 i jediničnim vektorom normale $\vec{n}_0$ koji ima smjer od ishodišta O prema pravcu p. Neka je $Q = (x_Q, y_Q)$ točka izvan pravca p smještena tako da se točke O i Q nalaze u suprotnim poluravninama u odnosu na pravac p. Neka je nadalje $\vec{r}_Q = x_Q\vec{i} + y_Q\vec{j}$ odgovarajući radij vektor točke Q, a Q' ortogonalna projekcija točke Q na pravac p i $\vec{q} = \overrightarrow{QQ'}$. Tada vrijedi (vidi Sliku 11.a)

$$\vec{r}_Q + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P_0} - \vec{r}_0 = \vec{0}.$$

Skalarnim množenjem s $\vec{n}_0$ dobivamo

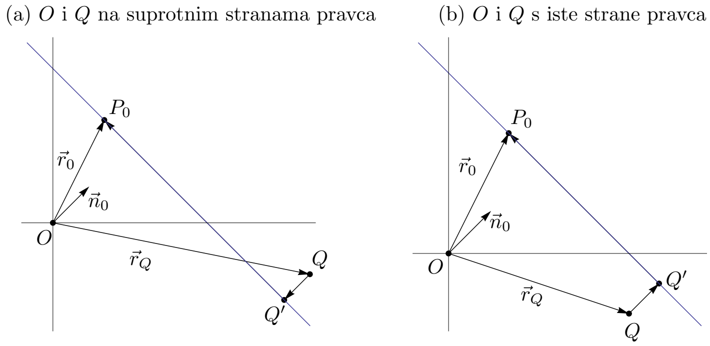
$$\vec{r}_Q \cdot \vec{n}_0 - q + 0 - \vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0 = 0.$$

odnosno

$$x_Q \cos\alpha + y_Q \sin\alpha - \delta = q. \tag{15}$$

Ako je $Q = (x_Q, y_Q)$ točka izvan pravca p smještena s iste strane pravca p kao i ishodište O, ponavljajući prethodnu proceduru dobivamo

$$\vec{r}_Q + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P_0} - \vec{r}_0 = \vec{0},$$
$$\vec{r}_Q \cdot \vec{n}_0 + q + 0 - \vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0 = 0,$$



Slika 11: Udaljenost točke do pravca u Hesseovom normalnom obliku

odnosno

$$x_Q \cos\alpha + y_Q \sin\alpha - \delta = -q. \tag{16}$$

Na osnovi (15)-(16) zaključujemo da je formulom

$$\delta_Q = x_Q \cos\alpha + y_Q \sin\alpha - \delta, \tag{17}$$

do na predznak određena udaljenost točke Q do pravca p. Ako je $\delta_Q > 0$, onda se točke Q i O nalaze s različitih strana pravca p, a ako je $\delta_Q < 0$, onda se točke Q i O nalaze s iste strane pravca p.

Udaljenost točke Q do pravca p određena je s

$$d(Q,p) = |x_Q \cos\alpha + y_Q \sin\alpha - \delta|. \tag{18}$$

Ako je pravac zadan implicitno $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, onda za $c < 0$ dobivamo Hesseov normalni oblik $\cos\alpha + \sin\alpha - \delta = 0$, gdje je

$$\cos\alpha = \tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \delta = \tfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0,$$

a udaljenost točke $Q = (x_Q, y_Q)$ do pravca jednaka je

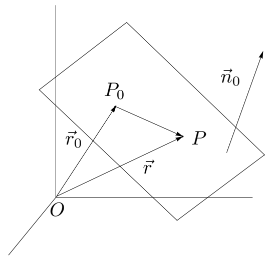
$$d(Q,p) = \left| x_Q \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + y_Q \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \right| = \frac{|ax_Q + by_Q + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{19}$$

2.2 Hesseov normalni oblik jednadžbe ravnine u prostoru

Neka je $(O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ pravokutni koordinatni sustav u prostoru. Ravnina M u prostoru zadana je nekom točkom $P_0 \in M$ i jediničnim vektorom

$$\vec{n}_0 = \cos\alpha \vec{i} + \cos\beta \vec{j} + \cos\gamma \vec{k},$$

koji ima smjer od ishodišta O prema ravnini M.



Slika 12: Hesseov normalni oblik jednadžbe ravnine u prostoru

Neka je $P = (x, y, z)$ proizvoljna točka u ravnini, a $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ odgovarajući radij vektor. Iz uvjeta okomitosti vektora $\vec{n}_0$ i vektora $\overrightarrow{P_0P}$ dobivamo vektorski zapis jednadžbe ravnine M

$$\vec{n}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0,$$

gdje je $\vec{r}_0$ radij vektor točke P_0. Prethodnu jednakost možemo pisati

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - \vec{n}_0 \cdot \vec{r}_0 = 0,$$

odakle uz oznaku (udaljenost točke O do ravnine M)

$$\delta := \vec{n}_0 \cdot \vec{r}_0 = (r_0)_{n_0} > 0,$$

dobivamo **Hesseov normalni oblik jednadžbe ravnine** M u prostoru

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta = 0. \tag{20}$$

Napomena 1. Postoji direktna veza između implicitnog oblika jednadžbe ravnine

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0, \tag{21}$$

i Hesseovog normalnog oblika (20).

Pretpostavimo da je $d < 0$ (ako nije, jednadžbu (21) pomnožimo s (-1)) i jednadžbu (21) podijelimo sa $\sigma = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Dobivamo

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \qquad a_1 = \frac{a}{\sigma}, \quad b_1 = \frac{b}{\sigma}, \quad c_1 = \frac{c}{\sigma}, \quad d_1 = \frac{d}{\sigma} < 0,$$

pri čemu je $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$. Zbog (1.14) parametar a_1 možemo shvatiti kao $\cos\alpha$, b_1 kao $\cos\beta$, a c_1 kao $\cos\gamma$, a δ kao $(-d_1) > 0$.

Slično kao u prethodnoj točki, formulom

$$\Delta_Q = x_Q\cos\alpha + y_Q\cos\beta + z_Q\cos\gamma - \delta, \quad \delta = \frac{-d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} > 0, \tag{22}$$

do na predznak određena je udaljenost točke $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ do ravnine M zadane u Hesseovom normalnom obliku. Udaljenosti točke $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ do ravnine M jednaka je

$$d(Q, M) = \frac{|ax_Q + by_Q + cy_Q + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \tag{23}$$

što se podudara s formulom (10). Veličina (22) je pozitivna (odnosno negativna) ako su točke O i Q s raznih strana (odnosno s iste strane) ravnine M.