Odjel za fiziku, Sveučilište u Osijeku 5. rujna 2018.

Pismeni dio ispita iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. Preslikavanje $F : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definirano je sljedeom formulom

$$(Fp)(t) = p''(t) + (tp(t-1))'.$$

(a) Provjerite da je F linearni operator.

(b) Odredite $\operatorname{Im} F$ i $\operatorname{Ker} F$, te rang i defekt.

(c) Naite matricu operatora F u kanonskoj bazi prostora $\mathcal{P}_3$.

(d) Odredite matricu operatora F u bazi (e') ako je $e'_1 = 1 + t^2$, $e'_2 = t + t^2$, $e'_3 = t + t^3$, $e'_4 = t^3$.

Zadatak 2. U prostoru $\mathcal{M}_2$ dan je potprostor

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 \ : \ 3a + b - c + 2d = 0, \ a - 2b + d = 0 \right\}.$$

Odredite mu bazu i dimenziju, te odredite neki direktni komplement M potprostora L. Matricu $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ prikažite u obliku $C = A + B$, $A \in L$, $B \in M$.

Zadatak 3. Na vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ definiran je standardni skalarni produkt. Neka je zadan potprostor $M = [\{(2, 4, 1, 2), (3, 0, -1, 1)\}]$. Odredite njegov ortogonalni komplement, te po jednu ortonormiranu bazu za M i $M^\perp$.

Zadatak 4. Koristeći Hamilton-Cayleyjev teorem odredite inverz matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$