Odjel za fiziku, Sveučilište u Osijeku 19. rujna 2018.

Pismeni dio ispita iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. Neka je zadan vektorski prostor $\mathcal{M}_2$ kvadratnih matrica reda 2, te matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

(a) (10 bod) Odredite realne parametre a i b tako da matrica $C = \begin{bmatrix} a & b-a \\ 1 & b \end{bmatrix}$ bude linearna kombinacija matrica A i B.

(b) (10 bod) Nadopunite skup $\{A, B\}$ do baze prostora $\mathcal{M}_2$.

Zadatak 2. (25 bod) Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} x & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

odredite vrijednost realnog parametra x ako je poznato da je A singularna. Za dobiveni parametar odredite svojstvene vrijednosti matrice A, njihove algebarske i geometrijske kratnosti i pripadne svojstvene potprostore svih svojstvenih vrijednosti. Može li se A dijagonalizirati?

Zadatak 3. (25 bod) U prostoru $\mathcal{M}_2$ dan je potprostor

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 \;:\; a + 2b - 4c - 3d = 0,\; 3a - 2c + d = 0,\; a - c = 0 \right\}.$$

Odredite mu bazu i dimenziju, te odredite neki direktni komplement M potprostora L. Matricu $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ prikažite u obliku $C = A + B$, $A \in L$, $B \in M$.

Zadatak 4. (30 bod) Neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operator projekcije na ravninu razapetu vektorima $\vec{a}_1 = \vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{a}_2 = \vec{j} - \vec{k}$. Odredite matrični prikaz ovog operatora u paru kanonskih baza. Nađite po jednu bazu za sliku i jezgru operatora, te odredite rang i defekt.