Odjel za fiziku, Sveučilište u Osijeku 5. srpnja 2018.

Pismeni dio ispita iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. Neka je V skup uređenih parova realnih brojeva $\mathbb{R}^2$. Neka su definirane operacije zbrajanja i množenja skalarom

$$(x_1, y_1) \boxplus (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 + y_2), \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$$

i

$$\alpha \boxdot (x, y) = (\alpha x, \alpha^3 y), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall (x, y) \in V.$$

Provjerite je li ovako definirana operacija zbrajanja asocijativna, te postoji li neutralni element za zbrajanje. Vrijedi li distributivnost množenja prema zbrajanju vektora i distributivnost množenja prema zbrajanju skalara?

Zadatak 2. U prostoru $\mathcal{M}_2$ dan je potprostor

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 \ : \ a - b - 2c + d = 0, \ 2a + b + c = 0 \right\}.$$

Odredite mu bazu i dimenziju, te odredite neki direktni komplement M potprostora L. Matricu $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ prikažite u obliku $C = A + B$, $A \in L$, $B \in M$.

Zadatak 3. Dokažite da je operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ definiran s

$$A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3)$$

regularan, odredite mu matrični prikaz u kanonskoj bazi, odredite pomoću svojstvenog polinoma inverz matrice $[A]_e^e$ te odredite formulu prema kojoj djeluje inverzni operator A^{-1}.

Zadatak 4. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & x & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

čija je jedna svojstvena vrijednost 1. Nađite realni broj x, preostale svojstvene vrijednosti matrice A, njihove algebarske i geometrijske kratnosti i pripadne svojstvene potprostore svih svojstvenih vrijednosti. Može li se A dijagonalizirati?