Odjel za fiziku, Sveučilište u Osijeku 13. lipnja 2018.

Drugi kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. Dokažite da je operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ definiran s

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, -3x_1 + 2x_2 + 2x_3)$$

regularan, odredite mu matrični prikaz u kanonskoj bazi, odredite pomoću svojstvenog polinoma inverz matrice $[A]_e^e$ te odredite formulu prema kojoj djeluje inverzni operator A^{-1}.

Zadatak 2. Neka je

$$L = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a - b - c + d = 0, \ a + c = 0\right\}.$$

Nađite $L^{\perp}$, po jednu ortonormiranu bazu za L i $L^{\perp}$, te $v = (1, 2, 3, 4)$ prikažite u obliku $v = x + y$, $x \in L$, $y \in L^{\perp}$.

Zadatak 3. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 10 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & x \end{bmatrix}$$

čija je jedna svojstvena vrijednost -1. Nađite realni broj x, preostale svojstvene vrijednosti matrice A, njihove algebarske i geometrijske kratnosti i pripadne svojstvene potprostore svih svojstvenih vrijednosti. Može li se A dijagonalizirati?

Zadatak 4. Neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operator projekcije na ravninu razapetu vektorima $\vec{a}_1 = \vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{a}_2 = \vec{i} + \vec{k}$. Odredite matrični prikaz ovog operatora u paru kanonskih baza. Nađite po jednu bazu za sliku i jezgru operatora, te odredite rang i defekt.