Odjel za fiziku, Sveučilište u Osijeku 26. travnja 2018.

Prvi kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. Neka je zadan vektorski prostor $\mathcal{M}_2$ kvadratnih matrica reda 2 i matrice A i B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) [10 bod] Odredite realne parametre a i b tako da matrica

$$C = \begin{bmatrix} a & b-1 \\ -1 & a+2b \end{bmatrix}$$

bude linearna kombinacija matrica A i B.

(b) [10 bod] Nadopunite skup $\{A, B\}$ do baze prostora $\mathcal{M}_2$.

Zadatak 2. Neka je V skup uređenih parova realnih brojeva $\mathbb{R}^2$. Neka su definirane operacije zbrajanja i množenja skalarom

$$(x_1, y_1) \boxplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 y_2), \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$$

i

$$\alpha \boxdot (x, y) = (\alpha^2 x, \alpha y), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in V.$$

Provjerite je li ovako definirana operacija zbrajanja asocijativna, te postoji li neutralni element za zbrajanje. Vrijedi li distributivnost množenja prema zbrajanju vektora i distributivnost množenja prema zbrajanju skalara?

Zadatak 3. U prostoru $\mathbb{R}^4$ dan je potprostor

$$L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0,\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0\}.$$

Odredite mu bazu i dimenziju, te odredite neki direktni komplement M potprostora L. Zapišite vektor $x = (1, 2, 3, 4)$ u obliku $x = a + b$, gdje je $a \in L$ i $b \in M$.

Zadatak 4. U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_2$ dani su potprostori

$$R = [\{1 + t + t^2, 1 - 2t\}] =: [\{r_1, r_2\}]$$

i

$$Q = [\{1 - t^2, 2 - t + t^2, -2t + 6t^2\}] =: [\{q_1, q_2, q_3\}].$$

Odredite baze i dimenzije potprostora $R + Q$ i $R \cap Q$.